Dérivation de la Loi de Poisson

d'une équation différentielle

Dans cette note, on établit la loi de poisson comme solution d'une équation différentielle.

Soit X le nombre de réalisations d'un événement dans un intervalle de temps $[0, t]$. On suppose :

- La probabilité de réalisation d'un événement dans un intervalle de temps $]t, t + \Delta t]$est $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ où $\boldsymbol{\lambda}$ est une constante indépendante de *t.*
- Si la longueur de l'intervalle est assez petite alors la réalisation de l'événement plus d'une fois dans cet intervalle est $o(\Delta t)$.
- Les réalisations de l'événement dans deux intervalles qui ne se chevauchent pas sont indépendantes.

On veut montrer que la loi de probabilité de *X* est

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

pour $x = 0, 1, 2, \dots \dots \dots$

Notons par $P(x, t)$ la probabilité que l'événement se réalise *x* fois dans l'intervalle $[0, t]$.

Trouvons d'abord $P(0, t)$.

$P(0, t + \Delta t)$ est la probabilité de 0 réalisations dans $[0, t + \Delta t]$.

0 réalisations dans $[0, t + \Delta t]$ veut dire 0 réalisations dans $[0, t]$ et 0 réalisations dans $]t, t + \Delta t]$, Par indépendance $P(0, t + \Delta t) = P(0, t) P(0 \text{ réalisations dans }]t, t + \Delta t])$

Si Δt est assez petit, $P(0 \text{ réalisations dans }]t, t + \Delta t]) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ car la probabilité de réalisations plus d'une fois est $o(\Delta t)$.

On a alors $P(0, t + \Delta t) = P(0, t) - P(0, t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t))$

$$\frac{P(0, t + \Delta t) - P(0, t)}{\Delta t} = -\lambda P(0, t) + o(1)$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient

$$\frac{d}{dt}P(0,t) = -\lambda P(0,t)$$

En plus, on a $P(0,0) = 1$.

La résolution de cette équation linéaire (séparation des variables) donne $P(0,t) = e^{-\lambda t}$.

Trouvons en général $P(x,t)$ pour $x > 0$.

$P(x,t+\Delta t)$ est la probabilité de *x* réalisations dans $[0,t+\Delta t]$

x réalisations dans $[0,t+\Delta t]$ veut dire $x-k$ réalisations dans $[0,t]$ et *k* réalisations dans $]t,t+\Delta t]$ avec $0 \leq k \leq x$.

Par indépendance, on obtient :

$$P(x,t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{x} P(x-k,t)P(k \text{ réalisations dans }]t,t+\Delta t]\ )$$

Comme

$P(1\ \text{ réalisation dans }]t,t+\Delta t]\ ) = (\lambda\Delta t + o(\Delta t))$

et $P(\text{ 2 réalisations ou plus dans }]t,t+\Delta t]\ ) = o(\Delta t)$

On a $P(\text{ 0 réalisations dans }]t,t+\Delta t]\ ) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ et par suite

$$P(x,t+\Delta t) = P(x,t)\big(1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)\big) + P(x-1,t)\big(\lambda\Delta t + o(\Delta t)\big) + \sum_{k=2}^{x} P(x-k,t)\, o(\Delta t)$$

$$\frac{P(x,t+\Delta t) - P(x,t)}{\Delta t} = -\lambda P(x,t) + \lambda P(x-1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\left(P(x,t) + P(x-1,t) + \sum_{k=2}^{x} P(x-k,t)\right)$$

En faisant tendre Δt vers 0, On obtient

$$\frac{d}{dt}P(x,t) = -\lambda P(x,t) + \lambda P(x-1,t)$$

On a déjà vu que $P(0,t) = e^{-\lambda t}$ et on a les conditions initiales $P(x,0) = 0$ pour $x \geq 1$.

On peut alors faire une induction. Cependant on choisit de trouver $P(1,t)$ et ainsi montrer la démarche à suivre.

$$\frac{d}{dt}P(1,t) = -\lambda P(1,t) + \lambda P(0,t) \ \ et \ P(1,0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}P(1,t) = -\lambda P(1,t) + \lambda e^{-\lambda t} \ et \ \ P(1,0) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est $P(1,t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

En continuant ce processus on arrive à la formule désirée :

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$