École de technologie supérieure

MAT472 : Algèbre linéaire et géométrie de l'espace

Résumé de la deuxième moitié de la session

Michel Beaudin
22 novembre 2021

Matrices et systèmes d'équations linéaires : introduction

1.1 Matrice Nous avons déjà rencontré des « matrices » dans la première partie du cours lorsqu'on trouvait les points critiques d'une fonction de deux variables à l'aide de la commande « zeros » par exemple. Une *matrice* est un tableau rectangulaire disposé sur m lignes (rangées) et n colonnes où m et n sont des entiers positifs. En général, les éléments de la matrices (il y a en $m \cdot n$) seront des nombres réels mais cela pourrait être des nombres complexes, voire des fonctions. Si **A** une matrice de format $m \times n$, il est d'usage de dénoter par a_{ij} l'élément situé à l'intersection de la rangée i et de la colonne j. Si **A** et **B** sont deux matrices de même format disons $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]$, , alors on posera la somme **C** = **A** + **B** en définissant simplement **C** par $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$. Et si α est un scalaire (réel ou complexe), alors la matrice $\alpha\mathbf{A}$ sera définie en posant $\alpha\mathbf{A} = \left[\alpha\, a_{ij}\right]$.

1.2 Contexte et définition Dans un système d'équations linéaires, on a **A** une matrice de format $m \times n$, qui est la matrice des coefficients du système (en général des nombres réels ou complexes), on a **X** = $\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T$ la matrice $n \times 1$ des inconnues et **K** = $\left[k_1\ k_2\ \ldots\ k_m\right]^T$ la matrice $m \times 1$ des constantes (le « côté droit » dans le système d'équations : **X** et **K** sont souvent appelés des vecteurs colonnes). Si **K** = **0**, le système est dit *homogène*.

1.3 Produit de matrices Un système d'équations linéaires s'écrit sous la forme **AX** = **K** à cause du produit matriciel. En effet, si **A** est de format $m \times n$, si **B** est de format $n \times p$, alors on définit la *matrice produit* de **A** et **B** par **C** = **AB**, de format $m \times p$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$. Le produit matriciel n'est pas en général commutatif — même dans le cas où **A** et **B** sont carrées de même ordre. Par contre, il est associatif : **D**(**EF**) = (**DE**)**F** où **D** est de format $m \times n$, **E** de format $n \times p$ et **F** de format $p \times q$. Rappelons aussi que si **B** est de format $m \times n$, la notation $\mathbf{B}^T$ signifie la *matrice transposée* de la matrice **B** — on intervertit lignes et colonnes de **B** et donc la nouvelle matrice est de format $n \times m$.

1.3.1 Exemple Le système de 2 équations linéaires à 3 inconnues $\begin{cases} 2x-5y+z=1 \\ x-4z=0 \end{cases}$ peut se décrire par $\mathbf{AX} = \mathbf{K}$ où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Remarquons la chose suivante qui servira plus loin : l'image par la matrice **A** du vecteur **X** est le vecteur $\begin{bmatrix} 2x-5y+z \\ x-4z \end{bmatrix}$ et on voit que c'est une « combinaison linéaire » des *colonnes* de **A** puisque $\begin{bmatrix} 2x-5y+z \\ x-4z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Cela est vrai en général : dans un produit de matrices **AX** où **A** est de format $m \times n$ et **X** de format $n \times 1$, les colonnes sont des combinaisons linéaires de colonnes de **A**, les scalaires utilisés provenant de **X**.

1.4 Remarque Une formule comme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ n'est plus vraie pour les matrices! Le mieux qu'on pourra écrire sera, pour des matrices **A** et **B** carrées de même ordre,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathbf{A} + \mathbf{B}^2.$$

D'ailleurs la figure 1 donne un exemple et on profite pour montrer certains résultats élémentaires :

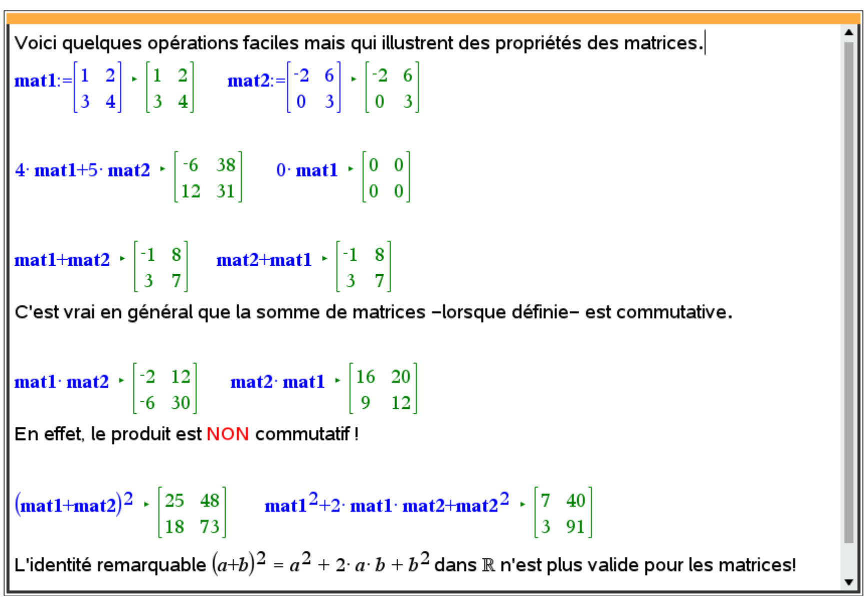

Figure 1

Espaces vectoriels et transformations linéaires

2.1 Définition Si l'on se limite aux opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, l'ensemble des matrices de format $m \times n$ forme un *espace vectoriel* sur le corps des réels (ou des complexes). Plus généralement, un espace vectoriel est un ensemble (non vide) V muni de 2 opérations (l'addition et le produit par un scalaire : $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in V$ et qui satisfait aux 8 axiomes suivants : pour u, v, w des éléments de V, pour des scalaires α et β, on doit avoir

1) $u + v = v + u$
2) $(u + v) + w = u + (v + w)$
3) Il existe un élément neutre 0 tel que $u + 0 = u$
4) Il existe un inverse additif $-u$ tel que $u + (-u) = 0$
5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
6) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
7) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta) u$
8) $1u = u$

Le « . » entre un scalaire et un vecteur sera souvent omis par la suite mais un espace sera souvent placé pout éviter de la confusion. Et nous continuerons d'utiliser des caractères gras pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de même que pour les matrices.

2.2 Exemples De la première partie du cours, on peut dire qu'on connaît déjà l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ des n-tuplets de nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ou des vecteurs $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de $\mathbb{R}^n$). D'un cours de calcul ou d'analyse, on connaît l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, dénoté $C[a, b]$. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n forme aussi un espace vectoriel. Tous ces exemples et d'autres sont souvent plus que de simples espaces vectoriels : une norme peut être définie, souvent à partir d'un produit scalaire.

2.3 Définitions Un sous-ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ d'un espace vectoriel V est dit *linéairement indépendant* si $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$.

2.4 Définitions et exemple Souvent, on travaille dans un « sous-espace ». On dit que E est un *sous-espace* de l'espace vectoriel F si E est un sous-ensemble de F, si $0 \in E$ et si E est fermé pour l'addition et le produit par un scalaire. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les droites passant par l'origine, de même que les plans passant par l'origine constituent des sous-espaces. Si H est un sous-espace d'un espace vectoriel V, un ensemble de vecteurs $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\} \subset V$ est une *base* de *H* si B est linéairement indépendant et si B *engendre H*, i.e. si l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de B donne *H*. On connaît déjà la *base canonique* de $\mathbb{R}^n$, formée des vecteurs qui sont les colonnes de la matrice identité : $\mathbf{e}_1 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T, \mathbf{e}_2 = [0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0]^T, \ldots, \mathbf{e}_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^T$. Et si l'on dispose d'une base *B* d'un sous-espace *H* de *V*, alors chaque élément de *H* s'écrit de comme combinaison linéaire des éléments de *B*, les scalaires utilisés étant appelés les *coordonnées* de ce vecteur relativement à la base *B*. Voir l'exemple 2.5.1 plus loin. Une notation de Lay est la suivante : si *B* une base d'un espace vectoriel *V* et soit **x** un vecteur de *V*, alors on dénote les coordonnées de **x** relativement à *B* par $[\mathbf{x}]_B$.

2.5 Définitions et remarque Une *transformation linéaire T* entre 2 espaces vectoriels *V* et *W* est une fonction $T : V \to W$ qui préserve les 2 opérations : $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ et $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$ pour tous $v_1, v_2 \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. On montre facilement qu'alors *T*(0) = 0 (condition <u>nécessaire</u> mais <u>non suffisante</u> puisque, par exemple $T(x) = x^2$ n'est manifestement pas linéaire !).

Une transformation linéaire est dite *injective* si $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2 \ (v_1, v_2 \in V)$. Cela revient à vérifier que seulement 0 est envoyé dans 0 ou encore que le sous-espace Ker(*T*) de *V* est réduit à l'élément 0. La défintion de Ker(*T*) ou le *noyau* de *T* est $\text{Ker}(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$.

Elle est dite *surjective* si $\forall w \in W, \exists v \in V : T(v) = w$. Si l'on définit l'image de *T* par

$$\text{R}(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ pour un } v \in V\},$$

alors c'est un sous-espace de *W* (non vide puisqu'il contient 0) et la transformation est surjective si et seulement si R(*T*) = *W*.

On dit finalement que *T* est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. On montre alors qu'il existe une transformation (linéaire) inverse, dénotée T^{-1}.

2.5.1 Exemple Trouvons la formule générale d'une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui envoie le point (1, 2) dans (4, 5) et le point (2, 3) dans (−1, 6). On peut donc dire qu'on cherche des constantes *a*, *b*, *c* et *d* telles que $T(x, y) = (a\,x + b\,y, c\,x + d\,y)$. En représentant *T* par sa matrice, on cherche

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

telle que $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, \mathbf{A}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}$. On veut donc que $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\5&6\end{bmatrix}$. On calcule donc $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&-1\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-14&9\\-3&4\end{bmatrix}$ et ainsi $T(x, y) = (-14x + 9y, -3x + 4y)$.

On aurait pu aussi procéder comme suit : puisque l'ensemble $B=\{(1,2),(2,3)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, alors si (x, y) est un quelconque point de $\mathbb{R}^2$, nous allons trouver des scalaires α et β tels que $(x,y)=\alpha\cdot(1,2)+\beta\cdot(2,3)$. En faisant résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues (ici on peut faire "solve" et nous justifierons plus loin à la section 3 comment cela se fait), on trouve $\alpha = 2y - 3x$ et $\beta = 2x - y$. Mais alors, par linéarité de T, on a

$$\begin{aligned}T(x,y)&=T\left((2y-3x)\cdot(1,2)+(2x-y)\cdot(2,3)\right)\\&=(2y-3x)\cdot(4,5)+(2x-y)\cdot(-1,6)=(-14x+9y,-3x+4y).\end{aligned}$$

Dans cet exemple, on a utilisé les deux vecteurs suivants : $B=\{(1,2),(2,3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puisque les vecteurs [1, 2] et [2, 3] sont manifestement linéairement indépendants et il y en a deux qui est la dimension de $\mathbb{R}^2$. Et on a donc trouvé que les coordonnées d'un quelconque vecteur $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ relativement à cette base sont, en notant comme dans Lay, $[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix}2y-3x\\2x-y\end{bmatrix}$.

2.5.2 Quelques résultats utiles Dans Lay, les résultats suivants sont démontrés. Soit $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ une application linéaire. Soit **A** la matrice (de format $m \times n$) canoniquement associée à T. Alors :

- T est surjective si et seulement si les colonnes de **A** engendrent $\mathbb{R}^m$.
- T est injective si et seulement si les colonnes de **A** sont linéairement indépendantes.
- Si $n = m$, alors T est injective si et seulement T est surjective si et seulement si T est bijective.

2.5.3 Exemple La transformation linéaire $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (3x + y, 5x + 7y, x + 3y)$. est injective mais non surjective. En effet, si $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^T$, on a $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ où $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1\\5&7\\1&3\end{bmatrix}$.

Les 2 colonnes de **A** sont linéairement indépendantes mais n'engengrent évidemment pas $\mathbb{R}^3$. Nous continuerons cet exemple plus loin en trouvant explicitement l'image.

2.6 Définition Soit $[h, k]$ un vecteur fixé (ou le point (h, k) fixé). Si l'on pose $T(x, y) = (x + h, y + k)$ dans le but d'effectuer une translation par (h, k), cette fonction n'est pas une transformation linéaire. En effet, l'origine n'est pas envoyée dans elle-même (mais dans le vecteur qui sert de translation). Par conséquent, si l'on veut représenter une translation à l'aide d'un produit matriciel, on doit utiliser les *coordonnées homogènes* : les coordonnées homogènes du point du plan (x, y) sont le triplet $(x, y, 1)$ et les coordonnées homogènes du poin de l'espace (x, y, z) sont $(x, y, z, 1)$. La translation T, définie par $T(x, y) = (x + h, y + k)$ pourra donc être représentée comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.7 Transformations linéaires géométriques du plan Elles sont représentées par la matrice canonique donnée dans les tableaux des figures suivantes.

Symétrie orthogonale d'axe $Ox : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Symétrie orthogonale d'axe $Oy : \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Symétrie orthogonale d'axe $y = x : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Symétrie orthogonale d'axe $y = -x : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Symétrie centrale de centre $O : \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Note : on dit aussi "matrice de réflexion par rapport à $\cdots$" pour les matrices précédentes.

Contraction/dilatation horizontale : $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Contraction/dilatation verticale : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Cisaillement horizontal : $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Cisaillement vertical : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Projection sur l'axe des $x : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Projection sur l'axe des $y : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figure 2

En combinant les 2 matrices de contraction/dilatation en celle de cadrage, en utilisant les coordonnées homogènes afin de rajouter la matrice de translation, nous avons :

Cadrage de facteur s pour x et de facteur t pour y : $\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Translation par un vecteur $[h,k]$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figure 3

En rajoutant les matrices de rotation selon chacun des 3 axes, nous avons pour la rotation d'angle θ (dans le sens anti-horaire lorsque vu depuis la partie positive de l'axe) les matrices suivantes :

axe des z : $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	axe des x : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	axe des y : $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

Figure 4

2.7.1 Exemple On comprend mieux l'effet de ces matrices sur une figure (e.g. un segment, un vecteur, un triangle) en visualisant le résultat. Notons au départ que la linéarité préserve les segments — donc un triangle (par exemple) restera un triangle après un nombre fini de ces transformations. Voici le résultat qui résulte du produit de certaines des matrices définies en 2.7 sur un vecteur 2D $[x \quad y]^T$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ k \cdot y \end{bmatrix} \ldots\ldots$$

2.7.2 Exemple Trouvons les nouveaux sommets du trapèze dont les sommets sont (1, 0), (2, 0) (2, 4) et (1, 1) si l'on effectue une rotation autour de l'origine de 90°, suivie d'une translation par le vecteur [−2, −3] et, finalement, d'une symétrie orthogonale d'axe Oy. Si les matrices requises sont $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ et $\mathbf{M_3}$, alors la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1}$ fait le travail.

$$\mathbf{M_1} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° & 0 \\ \sin 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les nouveaux sommets du trapèze sont (2, −2), (2, −1) (6, −1) et (3, −2) :

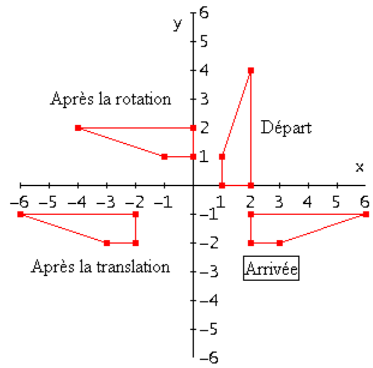

Figure 5

Sur Nspire CAS, peut réaliser simplement cela en utilisant le logiciel de géométrie intégré (détails en classe). On peut évidemment définir les matrices requises dans une page de calcul :

$$trapeze:=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&0&4&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&0&4&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$m:=kit\_ets\_mb\backslash parti2d\left(\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\cdot kit\_ets\_mb\backslash trans2d(-2,-3)\cdot kit\_ets\_mb\backslash rotate\_z(90°) \qquad \begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$m\cdot trapeze \qquad \begin{bmatrix}2&2&6&3\\-2&-1&-1&-2\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Figure 6

Résolution d'un système d'équations linéaires AX = K

3.1 Définitions Les opérations élémentaires de ligne et les matrices élémentaires ont été un premier pas en ce sens. En effet, si **A** est une matrice de format $m \times n$, une *opération élémentaire de ligne* sur **A** consiste en l'une des 3 opérations suivantes : intervertir 2 lignes, multiplier la ligne i par le scalaire c (non nul) et, à la ligne i, ajouter c fois la ligne j. La matrice **B** obtenue (après un certain nombre d'opérations de lignes) est dite *ligne-équivalente à* **A**. On notera par $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ pour indiquer cette équivalence (et il sera utile d'écrire chacune des opérations qui ont procuré ce résultat). Remarquons que chacune de ces opérations est inversible.

3.2 Définition et théorème Soit **A** une matrice de format $m \times n$. Une matrice **R** de format $m \times n$ est dite *l-réduite-échelonnée* si **R** satisfait aux 4 conditions suivantes :

- Toutes les ligne nulles (s'il y en a) sont en-dessous des lignes non nulles.
- Dans chaque ligne non nulle, le premier élément non nul est un 1. La colonne où ce 1 apparaît est dite colonne pivot de la ligne.
- Dans la colonne pivot d'une ligne, tous les éléments des autres lignes sont des 0.
- Les colonnes pivots apparaissent en ordre croissant.

On peut montrer que, pour une matrice $\mathbf{A}$ de format $m \times n$, il existe une et une seule matrice *l-réduite-échelonnée* $\mathbf{R}$. Sut la calculatrice symbolique TI, la commande « rref » nous la donne d'un seul coup. Le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{R}$ est dit le *rang* de $\mathbf{A}$, noté $\mathrm{r}(\mathbf{A})$. Évidemment, on a $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq m$ mais comme il y a autant de lignes non nulles que de colonnes pivots, on a aussi $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq n$. Donc $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

3.3 Définitions Lorsqu'une opération de ligne est appliquée à la matrice identité d'ordre m, la matrice obtenue est dite *élémentaire*. On peut montrer que si L est une opération de ligne appliquée sur $\mathbf{A}$ qui nous amène à la matrice $\mathbf{B}$ qu'on dénotera par $L(\mathbf{A})$, alors $L(\mathbf{A}) = \mathbf{EA}$ où $\mathbf{E} = L(\mathbf{I})$. Une bonne façon de travailler en faisant des opérations de lignes est donc d'augmenter la matrice $\mathbf{A}$ de la matrice $\mathbf{I}$ (d'ordre m). Ainsi, si l'on a effectué k opérations de lignes afin de passer de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$, alors

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}] \sim [\mathbf{B} \vdots \mathbf{P}] \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{PA}. \text{ Avec } \mathbf{P} = \mathbf{E}_k \mathbf{E}_{k-1} \ldots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 = L_k L_{k-1} \cdots L_2 L_1 (\mathbf{I}_m).$$

3.4 Définition Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est dite *inversible* si l'on peut trouver une matrice de même format $\mathbf{B}$ telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ (l'identité d'ordre n, l'ordre de $\mathbf{A}$). On dénote alors cette matrice $\mathbf{B}$ par $\mathbf{A}^{-1}$.

3.4.1 Exemple Vérifions si la matrice $\mathbf{A}$ suivante est inversible :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

On a $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 44/41 & -9/41 & -10/41 \\ 0 & 1 & 0 & -42/41 & 3/41 & 17/41 \\ 0 & 0 & 1 & 27/41 & 1/41 & -8/41 \end{bmatrix}$ d'où $\mathbf{A}$ inversible et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 44 & -9 & -10 \\ -42 & 3 & 17 \\ 27 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

3.5 Les méthodes présentées dans ce cours pour résoudre un système linéaire sont résumées dans les sections 3.6, 3.7, 4.9 et 4.10. Voici une première méthode pour résoudre un système d'équations linéaires

$\mathbf{AX} = \mathbf{K}$. Ici $\mathbf{A}$ est une matrice dont les entrées sont réelles (ou complexes), de format $m \times n$ (on peut avoir $m = n$ ou non). La méthode est générale et est basée sur les opérations de lignes.

3.6 Algorithme de Gauss-Jordan On augmente la matrice $\mathbf{A}$ de la matrice $\mathbf{K}$, obtenant ainsi une matrice de format $m \times (n + 1)$. Les opérations de lignes créent un système équivalent (qui possède le même ensemble-solution) $\mathbf{BX} = \mathbf{J}$ où $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{K}] \sim [\mathbf{B} \vdots \mathbf{J}]$.

Il reste à interpréter l'ensemble-solution et 3 cas différents peuvent se présenter :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{r}([\mathbf{A} \vdots \mathbf{K}]) > \mathrm{r}(\mathbf{A}) \Rightarrow \varnothing \quad \text{(système incompatible)} \\ \mathrm{r}([\mathbf{A} \vdots \mathbf{K}]) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) < n \Rightarrow \text{infinité de solutions} \\ \mathrm{r}([\mathbf{A} \vdots \mathbf{K}]) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = n \Rightarrow \text{solution unique} \end{array}}$$

3.6.1 Exemple Résolvons les 3 systèmes $\mathbf{AX} = \mathbf{K}_i$ où $i = 1$ ou 2 ou 3 avec les données suivantes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & -4 \\ 4 & -2 & -9 & 7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Il ne sert à rien d'augmenter $\mathbf{A}$ de $\mathbf{0}$. Puisque

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{K}_2 \vdots \mathbf{K}_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -4 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & -9 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

on voit que $\mathbf{AX} = \mathbf{K}_2$ est incompatible (on a trouvé que $0 = 1$).

Les variables libres sont y et w puisque la première et la troisième colonnes sont des colonnes pivots. Posons donc $y = s$ et $w = t$, des paramètres réels. Alors, pour $\mathbf{AX} = \mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, on a $x = 1/2s + 1/2t$ et $z = t$. Donc, l'ensemble solution du système $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ sera

$$\mathbf{S_h} = \begin{bmatrix} 1/2\,s + 1/2\,t \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Et en posant $\mathbf{S_p} = \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ et en dénotant par $\mathbf{S}_3$ l'ensemble−solution de $\mathbf{AX} = \mathbf{K}_3$, on a $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S_h} + \mathbf{S_p}$.

3.6.2 Remarque Plus généralement, si $\mathbf{S_p}$ est une solution particulière d'un système d'équations linéaires **AX** = **K**, alors toute autre solution **S** de ce système peut s'exprimer sous la forme $\mathbf{S} = \mathbf{S_h} + \mathbf{S_p}$ où $\mathbf{S_h}$ est une solution du système homogène correspondant **AX** = **0**.

3.6.3 Retour à quelques résultats théoriques et retour à un exemple En 2.5.2, nous avons donné des résultats tirés du volume de Lay. Regroupons plusieurs résultats. Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Soit **A** la matrice (de format $m \times n$) canoniquement associée à T. Alors:

- Les colonnes pivots de **A** forment une base de l'image.
- T est surjective si et seulement si les colonnes de **A** engendrent $\mathbb{R}^m$ ou encore ssi tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire des colonnes de **A** ou encore ssi toutes les colonnes de **A** sont pivots.
- T est injective si et seulement si les colonnes de **A** sont linéairement indépendantes ou encore ssi l'équation $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ admet seulement la solution triviale (i.e. ssi Ker(T) = **0**).
- Si $n = m$, alors T est injective si et seulement T est surjective si et seulement si T est bijective.

Donc, pour une matrice **A** de format $m \times n$, le noyau de **A** est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et l'image de **A** est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$. Et le *théorème du rang* affirme que r(**A**) + dim(Ker(**A**) = n pour toute matrice de format $m \times n$. Cela nous fait faire un r**etour à l'exemple 2.5.3.** Pour fixer les idées, soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (3x + y, 5x + 7y, x + 3y)$. Donc, si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$, on peut écrire

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \text{ où } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La transformation est injective puisque son noyau est effectivement réduit à (0, 0), donc de dimension zéro. En effet: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et donc $x = 0$ et $y = 0$. **A** est donc de rang 2, ce qui donne la dimension de l'espace image et, par conséquent, T n'est pas surjective puisque son image n'est pas tout $\mathbb{R}^3$ mais un sous-espace de dimension deux de $\mathbb{R}^3$, donc un plan. Cet exemple illustre bien le *théorème* *du rang* car **A** est de format 3×2 et $2 + 0 = 2$. Trouvons explicitement l'image de T. Si le point (x, y, z) est dans l'image, cela signifie qu'il existe (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $T(a, b) = (x, y, z)$. On réduit (à la main ou étape par étape) la matrice augmentée $\begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ 5 & 7 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix}$ et on trouve $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{3x-z}{8} \\ 0 & 1 & \dfrac{3z-x}{8} \\ 0 & 0 & -x+y-2z \end{bmatrix}$.

L'image est donc le plan $x - y + 2z = 0$, un sous-espace de dimension deux. En paramétrique, ce plan est le triplet

$$\begin{bmatrix} t & s & \dfrac{s-t}{2} \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et ainsi une base de l'espace image est par exemple $\{(1,0,-1/2),(0,1,1/2)\}$. Ou encore on peut prendre les 2 colonnes de la matrice **A**. Notez qu'à partir du fait qu'on savait que l'image était un plan passant par l'origine (puisque le noyau était réduit au point (0, 0) et que le théorème du rang nous informait alors que l'image était de dimension 2), on peut trouver immédiatement le plan image par le bon vieux produit vectoriel des 2 colonnes pivots : en effet, on a $[3, 5, 1] \times [1, 7, 3] = [8, -8, 16]$. Ainsi un vecteur normal au plan image est $[1, -1, 2]$ et l'équation du plan image est alors (puisque ce plan passe par l'origine) $x - y + 2z = 0$ tel que trouvé précédemment.

3.6.4 Exemple Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 10x_2 + x_3 + 13x_4, x_1 + 5x_2 + 8x_4).$$

Trouvons Ker(T) et $R(T)$ et des bases respectives. On peut représenter T par la matrice 2×4 suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Le noyau de T se trouve en résolvant le systeme homogène $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, donc en réduisant **A**:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Ainsi nous avons 2 variables libres (x_2 et x_4) ; par conséquent la dimension du noyau est 2 (et donc T n'est pas injective): en posant $x_2 = t$ et $x_4 = s$, nous avons que le noyau est $\mathrm{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -5t - 8s,\ x_2 = t,\ x_3 = 3s,\ x_4 = s,\ s, t \in \mathbb{R}\}$. Une base de Ker($T$) est l'ensemble $\{(-5,1,0,0), (-8,0,3,1)\}$. Les colonnes pivots de **A** engendrent évidemment $\mathbb{R}^2$, donc $R(T) = \mathbb{R}^2$ et T est par conséquent surjective.

3.7 Méthode de la matrice inverse Voici une seconde méthode pour résoudre un système d'équations linéaires **AX** = **K** <u>carré</u> (i.e. on a un système d'équations linéaires avec autant d'équations que d'inconnues) où, <u>en plus</u>, **A** est supposée inversible. Alors l'<u>unique</u> solution au système **AX** = **K** peut s'exprimer par

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}.$$

3.7.1 Exemple Le système $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$ possède une solution unique puisque la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ est manifestement inversible (ses 2 lignes sont indépendantes). La solution unique est alors obtenue par le calcul $\mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32/37 \\ -35/37 \end{bmatrix}$. Donc $x = 32/37,\ y = -35/37$.

3.7.2 Remarque On peut alors se demander s'il existe une formule directe donnant l'inverse d'une matrice carrée inversible, sans avoir à augmenter la matrice de la matrice identité et d'appliquer les opérations de ligne. La réponse passe par l'introduction du déterminant d'une matrice carrée.

Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Matrices d'ordres 2 ou 3 La motivation provient d'une matrice 2 × 2. En effet, rappelons (première partie de la session) que l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs [a, b] et [c, d] est donné par la norme du produit vectoriel de ces 2 vecteurs, ce qui vaut, à signe près, $ad - bc$. Mais alors, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, nous poserons det(**A**) = $ad - bc$, qu'on appelle le *déterminant de* **A**. On note aussi

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

En 3D, supposons que l'on a 3 vecteurs **u**, **v** et **w** :

$$\mathbf{u} = [a_{11}, a_{12}, a_{13}],\ \mathbf{v} = [a_{21}, a_{22}, a_{23}],\ w = [a_{31}, a_{32}, a_{33}].$$

Nous avons vu, au début de la session, que le volume du parrallélépipède engendré par les 3 vecteurs est, à signe près, le produit mixte de ces 3 vecteurs, à savoir

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= [a_{11}, a_{12}, a_{13}] \cdot [a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}] \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

$$\text{Alors, si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

4.2 Remarque. Il est clair que si une matrice carrée d'ordre 2 a une ligne nulle ou qu'une ligne est un multiple de l'autre, aucun parallélogramme n'est engendré et le déterminant vaut 0. De même, si, dans une matrice d'ordre 3, une ligne est combinaison linéaire des 2 autres, alors aucun solide n'est engendré et le volume (déterminant) est nul. Le fait qu'un déterminant d'ordre 3 se ramène au calcul de 3 déterminants d'ordre 2 nous amène à la définition générale suivante.

4.3 Définitions Soit **A** une matrice carrée d'ordre n. La sous-matrice (carrée d'ordre $n - 1$) obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j ($1 \le i, j \le n$) est dite *mineur*, noté $\mathbf{M}_{ij}$ et le nombre $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij})$ est dit *cofacteur* de **A** *d'indice* (i, j). Lorsqu'on transpose la matrice des cofacteurs, on obtient la *matrice adjointe* de **A**, dénotée adj **A**.

4.4 Exemple Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit de la matrice de l'exemple 3.4.1. Par exemple

$$\alpha_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 56 = -44; \quad \alpha_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - -9) = -17, \ldots\ldots \text{Et on trouverait que}$$

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -44 & 42 & -27 \\ 9 & -3 & -1 \\ 10 & -17 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -44 & 9 & 10 \\ 42 & -3 & -17 \\ -27 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

4.5 Calcul du déterminant : développement de Laplace Soit **A** une matrice carrée d'ordre n. Alors on obtient le déterminant de **A** en développant selon une quelconque ligne i : on effectue le produit scalaire de la ligne i avec le vecteur des cofacteurs correspondants.

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_{ij} \quad (1 \le i \le n)}$$

Cela possède l'inconvénient de nécessiter n! multiplications… Par conséquent, il peut être utile de se servir de certaines propriétés des déterminants, dont une liste est donnée en 4.7.

4.6 Exemple Pour quelles valeurs de k le système d'équations linéaires d'inconnues x, y, z admet-il une solution unique? Aucune solution? Une infinité de solutions? Le système est :

$$\begin{cases} k\,x + y + z = 1 \\ x + k\,y + z = 1 \\ x + y + k\,z = 1 \end{cases}$$

Il faut surtout éviter d'utiliser la commande « rref » sur la matrice augmentée … certaines valeurs de k procurant l'une des situations pourraient ne pas être visibles! (vérifiez). Puisque le déterminant de la matrice des coefficients s'annule pour les valeurs de k égales à 1 ou à −2 (vérifiez), on sait qu'il y aura une solution unique pour toute autre valeur de k. Si $k = 1$, alors là on peut utiliser Gauss-Jordan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{infinité de solutions}.$$

Si $k = -2$, alors encore avec Gauss-Jordan, on trouve

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varnothing.$$

En résumé, le système possède une infinité de solutions si $k = 1$, aucune solution si $k = -2$ et une solution unique pour toute autre valeur de k différente de 1 et de -2.

4.7 Quelques propriétés des déterminants Soit **A** carrée d'ordre n, de même que **B**.

1) Le déterminant est invariant sous l'opération de ligne « à la ligne i, ajouter c fois la ligne j ».
2) L'opération « intervertir 2 lignes » change le signe du déterminant.
3) L'opération « multiplier la ligne i par le scalaire c » produit cet effet sur le déterminant.
4) Si **A** est triangulaire supérieure ou inférieure (en particulier diagonale), alors det(**A**) = produit des éléments de la diagonale principale.
5) Si **A** a une ligne nulle, alors det(**A**) = 0.
6) **A** est inversible si et seulement si det(**A**) ≠ 0.
7) $\det(\mathbf{A}) = \det\left(\mathbf{A}^T\right)$. Donc, on peut développer le déterminant selon les colonnes aussi.
8) det(**AB**) = det(**A**) det(**B**). Par conséquent, $\det\left(\mathbf{A}^k\right) = \left(\det(\mathbf{A})\right)^k \quad \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

9) **A** adj **A** = det(**A**) **I**. Mais alors, si det(**A**) ≠ 0, on a une formule explicite pour l'inverse :
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det(\mathbf{A})}.$$
10) Si **A** est une matrice carrée d'ordre 2, si S est une figure plane d'aire finie, alors
$$\text{aire de } \mathbf{A}(S) = \left|\det(\mathbf{A})\right| \cdot \text{aire de } S$$
11) Si **A** est une matrice carrée d'ordre 3, si S est une région de l'espace de volume fini, alors
$$\text{volume de } \mathbf{A}(S) = \left|\det(\mathbf{A})\right| \cdot \text{volume de } S$$

4.8 Exemple Soit une matrice **A**, carrée d'ordre 4 dont le déterminant vaut 6. Alors, le déterminant de la matrice 5**A** vaut $5^4 \cdot 6 = 3750$. Le déterminant de $\mathbf{A}^{-1}$ vaut $1/6$.

4.9 Règle de Cramer Voici une troisième méthode pour résoudre un système linéaire carré **AX** = **K** ans le cas où **A** est carrée et inversible. Posons $\mathbf{X} = \left[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n\right]^T$, alors pour $1 \le i \le n$,

$$x_i = \frac{\det\left(\mathbf{A}_i\right)}{\det\left(\mathbf{A}\right)} \quad \text{où } \mathbf{A}_i = \text{matrice obtenue de } \mathbf{A} \text{ en remplaçant la colonne } i \text{ par } \mathbf{K}.$$

4.9.1 Exemple Reprenons l'exemple 3.7.1 et utilisons ici la règle de Cramer pour résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$. On a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, d'où det(**A**) = −37. Par conséquent la solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -6 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{18-50}{-37} = \frac{32}{37} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{20+15}{-37} = -\frac{35}{37}.$$

4.9.2 Exemple La matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}$ transforme le parallélogramme de la partie gauche de la figure 7 en celui de la figure de la partie droite (comme le lecteur pourra le vérifier) et l'aire est passée de 17 à 51. Et le déterminant de **A** vaut justement, en valeur absolue, 3 :

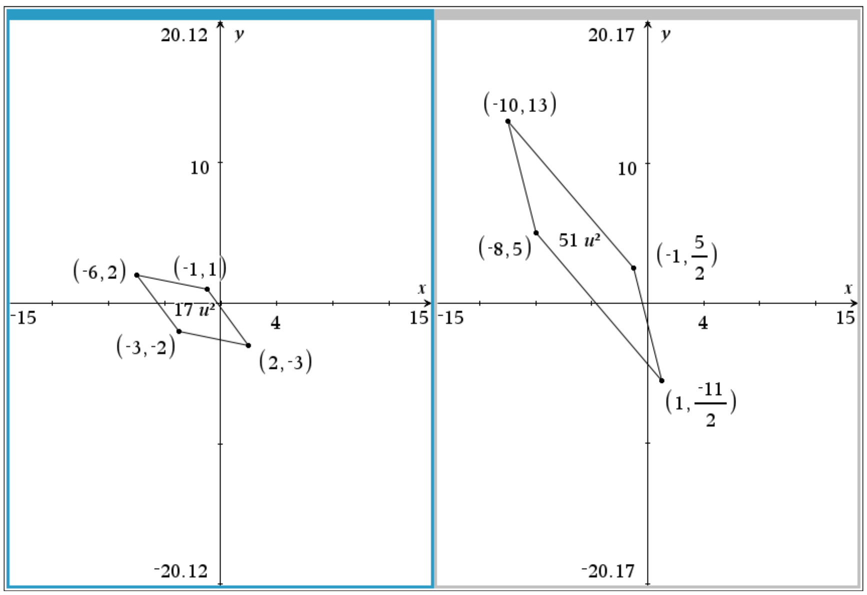

Figure 7

4.10 Décomposition LU On peut montrer que toute matrice **A** (format $m \times n$) peut se décomposer, à permutations près des lignes, comme un produit d'une matrice triangulaire inférieure (« lower ») et d'une matrice triangulaire supérieure (« upper »). En fait, **PA** = **LU**. Cela peut s'avérer utile pour obtenir une nouvelle méthode de résolution du système **AX** = **K** ou, lorsque **A** est carrée, pour calculer le déterminant de **A**. En effet, supposons qu'on doive résoudre le système **AX** = **K**. Alors **PAX** = **PK**, d'où **LUX** = **PK**. La matrice **PK** n'est rien d'autre que **K** où certaines lignes ont été permutées : nous la noterons **K**'. Posons **UX** = **Y**. On résout en premier le système **LY** = **K**', ce qui est facile puisque **L** est triangulaire inférieure. On trouve donc **Y**. On résout maintenant le système **UX** = **Y**, ce qui est facile puisque **U** est triangulaire supérieure.

Autres applications des matrices

5.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange On sait que, dans le plan, par 2 points ayant des abscisses différentes, passe une et une seule droite — un polynôme de degré un. Plus généralement, si l'on a n points du plan avec des abscisses 2 à 2 différentes, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ passant par ces n points. Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation de Lagrange*. Voyons pourquoi. Soit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \quad \text{tel que } p(x_i) = y_i \quad (1 \le i \le n) \text{ et } x_i \ne x_j \text{ si } i \ne j.$$

Cela nous mène au système d'équations linéaires **AX** = **K** où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Posons le déterminant suivant (dit *déterminant de Vandermonde*) :

$$\operatorname{van}(n) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \right).$$

On peut montrer que van(n) est non nul, donc que **A** est inversible (et donc la solution, qui existe, est alors unique). En classe, on s'est « convaincu » de cela comme suit. On a défini $\operatorname{van}(n) = \det\Big(\operatorname{seq}\Big(\operatorname{seq}\big(x[i]^j, j, 0, n-1\big), i, 1, n\Big)\Big)$. Et on a factorisé van(2), van(3) pour constater (sans prouver) que $\operatorname{van}(n) = \prod_{i<j} \left(x_j - x_i\right)$.

5.1.1 Implémentation Dans le fichier « Kit_ETS_MB », la fonction « poly_int » a été implémentée en regardant comment cela est fait dans le « bon vieux *Derive* » ! On procède comme suit : supposson que l'on cherche l'unique droite $p(x)$ passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Posons $L_1(x) = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$, $L_2(x) = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Alors $p(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$.

Supposons maintenant que l'on cherche l'unique polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 passant par 3 points donnés (x_i, y_i), $i = 1, 2$ et 3, avec abscisses 2 à 2 différentes. Posons

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \text{ et } L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Alors $p(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$. Et ainsi de suite.

5.1.2 Exemple L'unique parabole passant par les 3 points (1, 2), (3, 4) et (–5, 3) est :

$$\text{kit\_ets\_mb\textbackslash poly\_int}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, x\right) \qquad \frac{7 \cdot x^2}{48} + \frac{5 \cdot x}{12} + \frac{23}{16}$$

Figure 8

5.2 Matrice de transition et chaîne de Markov Considérons une matrice carrée **A** possédant les propriétés suivantes : chaque entrée est comprise entre 0 et 1 et, pour chaque colonne, la somme des éléments donne 1. Cela mène aux définitions suivantes.

5.2.1 Définitions Une matrice carrée $\mathbf{T} = \left[t_{ij}\right]$, d'ordre n, est appelée *matrice de transition* si

$$0 \le t_{ij} \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} t_{ij} = 1 \; \forall j.$$

Par exemple, toute matrice identité en est une. Si, à partir d'une certaine puissance de **T**, il ne reste plus aucune entrée nulle, on dit que **T** est *régulière* ou encore que **T** est une *matrice stochastique* : les colonnes d'une matrice stochastique sont donc des vecteurs de probabilité. L'entrée en position (i, j) est donc la probabilité de passer de l'état j à l'état i. Une *chaîne de Markov* est une suite de vecteurs de probabilités, définie par

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_0, \\ &\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_0, \\ &\mathbf{x}_2 = \mathbf{T}\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{x}_0, \\ &\ldots, \\ &\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{T}\mathbf{x}_k = \mathbf{T}^{k+1}\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Une telle suite converge-t-elle? Et la convergence dépend-elle du vecteur initialement choisi ?

5.2.2 Théorème Soit **T** une matrice de transition régulière (matrice stochastique). Alors

1) $\lim_{k\to\infty} \mathbf{T}^k$ existe et est une matrice dont toutes les colonnes sont le même vecteur **S**.

2) **TS** = **S**.

Le théorème nous donne donc 2 façons d'obtenir le vecteur *stabilisé* **S**.

5.2.3 Exemple Supposons que le mouvement d'une population entre la ville (V) et la banlieue (B) est modélisé par la matrice stochastique suivante : la migration annuelle entre ces 2 types d'habitat est régie par la matrice **T** où

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} V & B \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \end{array}$$

Supposons une population totale de 3 000 000 avec 2 500 000 en ville et 500 000 en banlieue. Soit donc $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 2\ 500\ 000 \\ 500\ 000 \end{bmatrix}$. La répartition de la population, après 1 an, sera donc de $\mathbf{Tx_0}$; après 2 ans, ce sera $\mathbf{T}^2\mathbf{x_0}$ et ainsi de suite. Des calculs successifs montrent que

$$\mathbf{T}^{200}\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1\ 125\ 000 \\ 1\ 875\ 000 \end{bmatrix}.$$

Puisque 1 125 000/3 000 000 = 37.5% et que 1 875 000/3 000 000 = 62.5%, on peut affirmer qu'à long terme, 62.5% des gens vivront en banlieue. C'aurait été le même pourcentage à long terme même avec une distribution différente de population. En effet:

5.2.4 Exemple À l'exemple précédent, prenons une population initiale quelconque :[

pv ; *pf*] telle que *pv* + *pf* = population totale.

Des calculs successifs nous montrent que

$$\mathbf{T}^k \begin{bmatrix} pv \\ pf \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.375(pv+pf) \\ 0.625(pv+pf) \end{bmatrix} \quad \text{si } k \to \infty \quad (k = 175 \text{ est suffisant}).$$

Puisque *pv* + *pf* représente la population totale, c'est dire qu'à long terme, 37.5% de la population va habiter en ville contre 62.5% en banlieue. En résolvant le système **TS = S** (nécessairement par utilisation de Gauss-Jordan puisque si la matrice **T** − **I** était inversible, alors on aurait **S** = **0**), on retrouve bel et bien **S** = [0.375 ; 0.625]. En effet :

$$\mathbf{T}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-0.05 & 0.03\\ 0.05 & -0.03\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -0.6\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Il y a donc une variable libre (y) et, posant $y = s$, une solution est donc $\begin{bmatrix}0.6s\\ s\end{bmatrix}$. Mais puisque la norme (colonne) de ce vecteur doit être nécessairement 1, on 1.6s = 1, d'où s = 0.625 et alors on a $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}0.375\\ 0.625\end{bmatrix}$

5.2.4 Comment justifier (quelque peu) l'existence d'un tel vecteur stabilisé ? La notion de valeurs propres va nous aider.

Diagonalisation des matrices carrées

6.1 Définition Soit **B** une matrice carrée. S'il existe un vecteur (matrice-colonne) **v** non-nul tel que $\mathbf{Bv}=\lambda\mathbf{v}$, alors **v** est dit *vecteur-propre* de **B** associé à la *valeur propre* λ.

Il en résulte que $\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=0$ et la résolution de cette équation polynomiale donnera les n valeurs propres de **B** (possiblement complexes, possiblement répétées). Et en réduisant la matrice $\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}$, on trouvera des vecteurs propres associés.

6.2 Exemple Il est évident que la matrice de rotation $\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ n'a pas de valeurs propres réelles car, si c'était le cas, on aurait des vecteurs (les vecteurs propres correspondants) qui seraient envoyés sur un multiple d'eux-mêmes : impossible, la matrice fait tourner les vecteurs, d'un angle θ.

6.3 Remarque et définition Si **v** est un vecteur propre d'une matrice **A** (carrée d'ordre n) associé à la valeur propre λ, alors l'ensemble $\{\mathbf{x}:(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ appelé *sous-espace propre* de **v**.

6.4 Exemple Trouvons des valeurs propres et des vecteurs propres correspondants pour la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 4 & 7\end{bmatrix}.$$

En résolvant l'équation det($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$) = 0, on trouve 3 et 11, qui sont donc les 2 valeurs propres de **A** (autant la fonction « Eigvl » que notre fonction « eigen » confirment). Pour la valeur propre 3, on réduit $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ et trouve la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Cela signifie qu'un vecteur propre associé $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ satisfait $x + y = 0$. Prenons $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (ou tout autre multiple non nul). Pour la valeur propre 11, on a $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ fait l'affaire.

Remarquons que si l'on pose **P** la matrice dont les colonnes sont les 2 vecteurs propres trouvés et si l'on pose **D** la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les 2 valeurs propres trouvées, alors $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$.

6.5 Définition Une matrice carrée **A** est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible **P** (de même format que **A**) telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ où **D** est diagonale. On a donc **AP = PD**. Ici, on s'entend pour dire qu'on reste dans le corps des nombres réels. En dénotant les colonnes de **P** par $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ et en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de **D**, cela signifie que $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Donc que les $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont de vecteurs propres de **A**, associés aux valeurs propres λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

6.6 Exemple On peut donc dire qu'à l'exemple 6.4, on a diagonalisé la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. La question suivante se pose alors : peut-on diagonaliser toutes les matrices carrées? La réponse est non. Le théorème suivant est utile.

6.7 Théorème Une matrice carrée **A** est diagonalisable si et seulement si on peut trouver n vecteurs propres linéairement indépendants. Une condition suffisante (mais non nécessaire) est d'avoir n valeurs propres réelles 2 à 2 distinctes.

6.8 Exemple Vérifions si les matrices suivantes sont diagonalisables (dans les réels): et si oui, diagonalisons-les.

$$\mathbf{M_1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M_2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M_3} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Nous donnons la solution pour la matrice $\mathbf{M_1}$. On laisse au lecteur vérifier que $\mathbf{M_2}$ n'est pas diagonalisable (elle possède une valeur propre double) et $\mathbf{M_3}$ n'est pas non plus diagonalisable (elle possède 2 valeurs propres complexes conjuguées). Pour $\mathbf{M_1}$, on trouve les valeurs propres suivantes : λ = 4, 8 et 8. Si $\lambda = 4$, on réduit la matrice $\mathbf{M_1} - 4\mathbf{I}$ pour obtenir un vecteur propre :

$$\mathbf{M_1} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut donc choisir comme vecteur propre $\mathbf{v_1} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$. Pour $\lambda = 8$, on trouve que

$$\mathbf{M_1} - 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme il y a 2 variables libres, nous pourrons trouver 2 vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 8. On prend $\mathbf{v_2} = [1 \;\; -1 \;\; 0]^T$ et $\mathbf{v_3} = [-2 \;\; 0 \;\; 1]^T$.

Mais alors si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M_1}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, une matrice diagonale !

Autre chose intéressante ici : puisque la matrice $\mathbf{M_1}$ est diagonalisable que le puissance « n » d'une matrice diagonale est simplement la matrice diagonale des éléments diagonaux élevés à la puissance « n », on peut donc écrire que pour un entier positif « n », on a trouvé une formule générale pour une quelconque puissance de $\mathbf{M_1}$:

$$\mathbf{M_1}^n = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot 8^n + 4^n}{4} & \frac{4^n - 8^n}{4} & \frac{4^n - 8^n}{2} \\ \frac{4^n - 8^n}{4} & \frac{3 \cdot 8^n + 4^n}{4} & \frac{4^n - 8^n}{2} \\ \frac{4^n - 8^n}{4} & \frac{4^n - 8^n}{4} & \frac{8^n + 4^n}{2} \end{bmatrix}.$$

6.9 Exemple Application en équations différentielles. Soit le système d'É.D.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 7y_1 + 4y_2, \quad y_1(0) = 2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 4y_1 + 7y_2, \quad y_2(0) = -1 \end{cases}$$

Résolvons-le par diagonalisation (en Mat 265, vous faisiez/ferez cela à l'aide de la transformée de Laplace). En notation matricielle, on a

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{où} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Notez que la matrice A est celle de l'exemple 6.4. Soit $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice obtenue lors de cet exemple et posons $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}(t)$. Alors $\dfrac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{z} = \mathbf{D}\,\mathbf{z}$. Ici $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale obtenue au même exemple 6.4. Ainsi, dénotant $\mathbf{z}(t)$ par $\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$, on a obtenu 2 équations différentielles faciles à résoudre, puisque « découplées » :

$\dfrac{dz_1}{dt} = 3z_1 \Rightarrow z_1 = c_1 e^{3t}$ et $\dfrac{dz_2}{dt} = 11z_2 \Rightarrow z_2 = c_2 e^{11t}$. On trouve les 2 constantes : $\mathbf{z}(0) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

Mais alors, la solution est

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2e^{3t} \\ 1/2e^{11t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{3t} + e^{11t} \\ e^{11t} - 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons vérifier cette réponse en utilisant une fonction programmée dans la librairie « Kit_ETS_MB » : cette fonction est « de_syst» et résout le système linéaire $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Sa syntaxe est : de_syst(**A**, **g**, *to*, **yo**). La figure 9 donne les détails.

$a:=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 4 & 7\end{bmatrix}:g:=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}:to:=0:yo:=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$
kit_ets_mb\de_syst(a,g,to,yo)	$\begin{bmatrix}\frac{e^{3\cdot t}\cdot\left(e^{8\cdot t}+3\right)}{2}\\ \frac{e^{3\cdot t}\cdot\left(e^{8\cdot t}-3\right)}{2}\end{bmatrix}$
$\text{propFrac}\left(\begin{bmatrix}\frac{e^{3\cdot t}\cdot\left(e^{8\cdot t}+3\right)}{2}\\ \frac{e^{3\cdot t}\cdot\left(e^{8\cdot t}-3\right)}{2}\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}\frac{e^{11\cdot t}}{2}+\frac{3\cdot e^{3\cdot t}}{2}\\ \frac{e^{11\cdot t}}{2}-\frac{3\cdot e^{3\cdot t}}{2}\end{bmatrix}$

Figure 9

6.10 Retour au vecteur stabilisé Si **T** est une matrice stochastique et si λ en est une valeur propre (possiblement complexe), alors nécessairement $|\lambda| \leq 1$. En effet, soit **v** un vecteur propre correspondant à cette valeur propre. On a **Tv** = λ**v** et on peut même supposer que **v** est de longueur 1 (en effet, on sait qu'un multiple d'un vecteur propre est aussi un vecteur propre). Utilisons le fait que, pour des matrices **A** et **B** dont le produit **AB** est défini, on a toujours

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|.$$

Ici, la norme d'une matrice peut être celle de notre choix (norme de Frobenius « norm », « colnorm », « rownorm » sur la TI symbolique par exemple). En choisissant « colnorm », on a donc, que pour une matrice stochastique **T**, la norme est 1. Mais alors, si **v** est un vecteur propre de **T**, de norme 1, associé à la valeur propre λ, on a

$$\|\mathbf{Tv}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\| = |\lambda| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = \|\mathbf{Tv}\| \leq \|\mathbf{T}\|\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{T}\| = 1.$$

Ainsi, toutes les valeurs propres d'une matrice stochastiques sont incluses dans le disque unité. De plus, l'une de ces valeurs propres est forcément 1 puisque la matrice $\mathbf{T} - \mathbf{I}$ n'est pas inversible car une combinaison de ses lignes donne une ligne nulle.

6.10.1 Exemple Soient les 2 matrices stochastiques suivantes (la première provient de l'exemple 5.2.3 modélisant la mouvement entre la ville et la banlieue. La seconde décrit les intentions de votes aux prochaines élections : « Démocrates », « Républicains », « Libéraux »).

$$
\mathbf{T} = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cc} V & B \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} V \\ B \end{array}
\end{array}
\qquad
\mathbf{A} = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} D & R & L \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.30 \\ 0.20 & 0.80 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.40 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} D \\ R \\ L \end{array}
\end{array}.
$$

Un calcul direct montre que les valeurs propres de $\mathbf{T}$ sont 1 et 0.92 tandis que celles de $\mathbf{A}$ sont 1, 0.3 et 0.6.

6.10.2 Exemple Reprenons la matrice $\mathbf{A}$ et soit maintenant $\mathbf{x}_0$ un quelconque vecteur représentant une population initiale répartie entre les 3 types d'électeurs (disons $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} eD & eR & eL \end{bmatrix}^T$). Des vecteurs propres $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ associés respectivement aux valeurs propres 1, 0.3 et 0.6 sont, par exemple,

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/4 & 2/3 & 1 \\ -15/4 & 1/3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Appelons **P** la dernière matrice. L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant car les 3 valeurs propres sont distinctes 2 à 2, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (donc **P** est inversible). On peut donc écrire ceci :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \\
&\mathbf{Tx}_0 = \mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = c_1\mathbf{Tv}_1 + c_2\mathbf{Tv}_2 + c_3\mathbf{Tv}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(0.3)\mathbf{v}_2 + c_3(0.6)\mathbf{v}_3 \\
&\mathbf{T}^2\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(0.3)^2\,\mathbf{v}_2 + c_2(0.6)^2\,\mathbf{v}_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\mathbf{T}^k\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(0.3)^k\,\mathbf{v}_2 + c_3(0.6)^k\,\mathbf{v}3 \qquad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{T}^k\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1.
\end{aligned}
$$

De plus, puisque $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, on a

$$
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix} eD \\ eR \\ eL \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{eD}{7} - \frac{eL}{7} - \frac{eR}{7} = -\frac{1}{7}(eD + eR + eL).
$$

Mais alors,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{T}^k \mathbf{x}_0 = -\frac{1}{7}(eD+eR+eL)\begin{bmatrix} -9/4 \\ -15/4 \\ -1 \end{bmatrix} = (eD+eR+eL)\begin{bmatrix} 9/28 \\ 15/28 \\ 1/7 \end{bmatrix} = (eD+eR+eL)\begin{bmatrix} 0.3214 \\ 0.5357 \\ 0.1429 \end{bmatrix}$$

Comme, *ed* + *eR* + *eL* représente la population totale, on a qu'à long terme, 32% des électeurs iront du côté Démocrate, 54% du côté Républicain et 14% du côté Libéral . Non seulement la limite précédente existe, mais la limite $\lim_{k\to\infty} \mathbf{T}^k$ existe aussi et n'est rien d'autre que la matrice dont les colonnes sont identiques et constituées du vecteur stabilisé **S** = $\begin{bmatrix} 0.3214 & 0.5357 & 0.1429 \end{bmatrix}^T$ En effet, **T** est diagonalisable et on a

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P} = \mathbf{D} \text{ avec } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Mais alors, $\mathbf{T}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3214 & 0.3214 & 0.3214 \\ 0.5357 & 0.5357 & 0.5357 \\ 0.1429 & 0.1429 & 0.1429 \end{bmatrix}.$

6.11 Valeurs propres complexes Lorsque **A** est une matrice carrée d'ordre *n*, alors le polynôme caractéristique det(**A** − λ**I**) est de degré *n*. Il est donc possible que certaines racines soient complexes (le polynôme étant à coefficients réels, les racines complexes se présenteront donc en paires conjuguées, s'il y en a). Si c'est le cas, la matrice ne sera pas diagonalisable dans les réels mais est reliée à une matrice de rotation. Illustrons avec une matrice d'ordre 2.

6.11.1 Exemple Soit $b > 0$. On sait qu'une matrice du genre $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ représente la forme canonique des matrices carrées d'ordre 2 ayant des valeurs propres complexes. En effet, les valeurs propres de **M** sont précisément $a \pm bi$. À moins que $a^2 + b^2 = 1$, on aura donc affaire à une rotation, suivie (ou précédée) d'une homothétie (contraction ou dilatation). Un exemple concret est donné en 6.11.2. Posons $\lambda_1 = a + bi$, donc choisissons la valeur propre dont la partie imaginaire est positive (évidemment, l'autre valeur propre est $\lambda_2 = a - bi$, le conjugué de λ_1). Cherchons un vecteur propre (complexe) associé à λ_1.

Appelons-le **vpc** et réduisons la matrice $\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}$. On a $\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-bi & -b\\ b & -bi\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. On peut donc prendre $\mathbf{vpc}=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$. Il ne sert à rien de trouver un vecteur propre associé à λ_2 (on pourrait prendre le conjugué de **vpc**), à moins, bien sûr, qu'on cherche à diaonaliser **M** dans le corps des nombres complexes. Remarquez que

$\mathbf{M}\cdot\mathrm{Re}(\mathbf{vpc})=\begin{bmatrix}-b\\ a\end{bmatrix}$ tandis que $\mathbf{M}\cdot\mathrm{Im}(\mathbf{vpc})=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$. Sur la calculatrice symbolique TI, la partie réelle est « real » et la partie imaginaire est « imag » :

6.11.2 Exemple Soit $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 8 & 7\end{bmatrix}$. Les valeurs propres de **M** sont $3\pm 4i$. Trouvons un vecteur propre (complexe) correspondant à 3 + 4*i* :

$$\mathbf{M}-(3+4i)\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-4-4i & -4\\ 8 & 4-4i\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1/2-1/2i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1+i\\ 2\end{bmatrix}\text{ fait l'affaire}.$$

Posons $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathrm{Im}(\mathbf{x}) & \mathrm{Re}(\mathbf{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Posons $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$. Remarquez que la matrice $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{C}=5\begin{bmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

avec θ = arccos(3/5) (environ 53°). Puisque $\mathbf{M}=\mathbf{P}\,\mathbf{C}\,\mathbf{P}^{-1}$, cela nous fait comprendre ce que fait la matrice **M** : d'abord un changement de variables, suivi d'une rotation et dilatation et, ensuite, d'une autre changement de variables.

6.11.3 Exemple Une façon simple de bien comprendre l'effet d'une matrice 2×2 ayant des valeurs propres complexes est de se restreindre à l'une déjà en forme canonique, donc de la forme $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ et de considérer les différents cas de a^2+b^2. Avec Nspire CAS, on peut utiliser le mode graphique « suite » et visualiser le système (dynamique discret) défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = a \cdot x_n - b \cdot y_n \\ y_{n+1} = b \cdot x_n + a \cdot y_n \end{cases}, \quad (x_0, y_0) \text{ donné.}$$

À partir du point (x_0, y_0) donné, la trajectoire sera un cercle de rayon $\sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}$ dans le cas où $a^2 + b^2 = 1$ (figure 10); une spirale convergeant vers l'origine dans le cas où $a^2 + b^2 < 1$ (figure 11) et une spirale de plus en plus grande dans le cas où $a^2 + b^2 > 1$ (figure 12) :

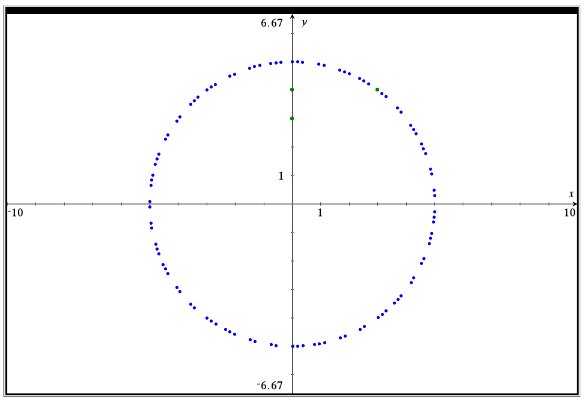

Figure 10
Point de départ choisi : (3, 4).
Valeur de a = 0.8; valeur de b = 0.6.

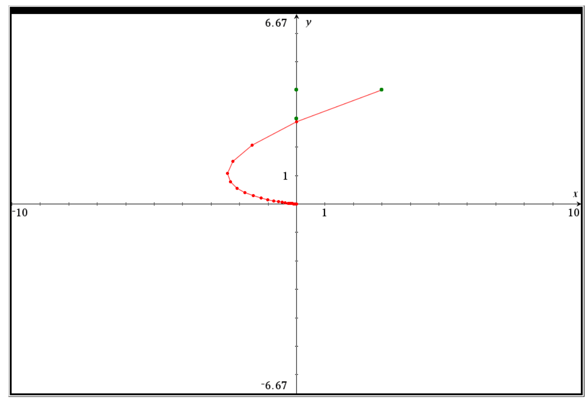

Figure 11
Point de départ choisi : (3, 4).
Valeur de a = 0.72; valeur de b = 0.54

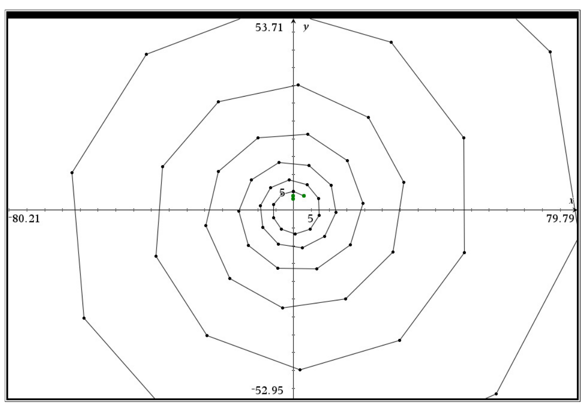

Figure 12
Point de départ choisi : (3, 4).
Valeur de a = 0.84; valeur de b = 0.63