

# École de technologie supérieure

## MAT472: Algèbre linéaire et géométrie de l'espace Résumé pour la première moitié de la session

Michel Beaudin  
10 août 2021

### Courbes paramétrées

**1.1 Définitions et contexte** Pour une courbe paramétrée 2D, la pente de la droite tangente est

donnée par  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$  et la longueur  $L$  est donnée par  $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ .

En 3D, la longueur est calculée par  $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$ .

Plus généralement, si  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$  désigne le vecteur-position d'un objet à l'instant  $t$  ( $a \leq t \leq b$ ), alors  $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)$  est le vecteur-vitesse (vecteur tangent) et alors  $L$  n'est rien d'autre

que la distance totale parcourue par l'objet entre les instants  $a$  et  $b$  puisque  $L = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt$ .

Mathématiquement parlant, une fonction du type  $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite *fonction vectorielle d'une variable réelle* et le graphique de son image est une courbe dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$  en pratique). L'exemple le plus simple est donné par les équations paramétriques d'une droite. Au contraire, une fonction du type  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée un *champ scalaire*. Lorsque  $n = 2$ , le graphique de  $f$  est une surface dans l'espace.

**1.2 Exemple** La fonction « arcLen » de la calculatrice trouve la longueur d'une courbe décrite par une expression (comme en Mat 145). Fabriquons-nous une fonction « long\_arc » qui donnera la longueur de la courbe  $C$  dont la représentation vectorielle est donnée par  $\mathbf{r}(t)$  pour  $a \leq t \leq b$ .

$$\text{long\_arc}(\mathbf{r}, t, a, b) := \int_a^b \text{norm}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{r})\right) dt$$

Done

$$\text{long\_arc}\left(\begin{bmatrix} s^2 & 2 \cdot s - 1 & 4 \cdot s \end{bmatrix}, s, 0, 1\right)$$

$$\frac{10 \cdot \ln(\sqrt{6} + 1) - 5 \cdot \ln(5) + 2 \cdot \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{long\_arc}\left(\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix}, t, 0, 2 \cdot \pi\right)$$

2 · π

Figure 1

**1.3 Exemple** Trouvons le point d'intersection des 2 courbes suivantes ainsi que l'équation de la droite tangente à la première courbe au moment où  $t = 1/2$ .

$$C_1 : \begin{cases} x = t^2/5 - \cos(t) \\ y = 3t/4 - 4 \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 5 \quad C_2 : \begin{cases} x = t^2/9 + 4t - 2 \\ y = 1/(t^2 + 1) + 5 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 5$$

On commence par produire un graphique (en mode paramétrique 2D) de chacune des courbes et, en mode trace, trouve approximativement les instants  $t$  et  $s$  respectifs du croisement des 2 trajectoires. Cela donnera un point de départ pour la commande « solve ». Les figures 2 et 3 résument le travail :

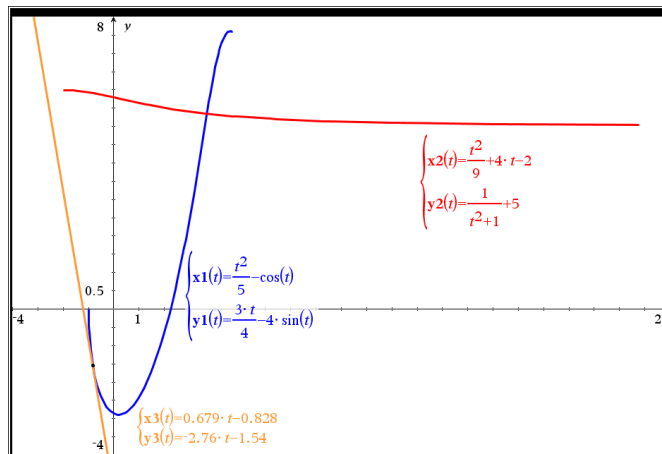


Figure 2

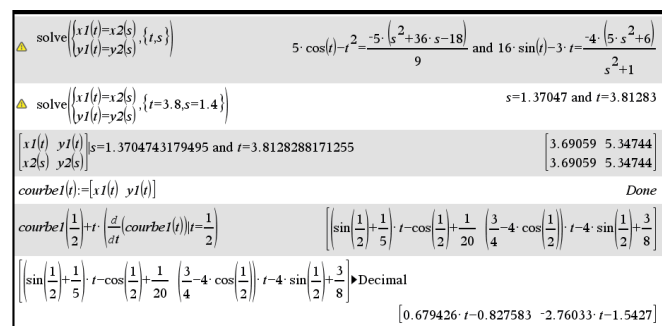


Figure 3

## Vecteurs

**2.1 Définitions** Étant donnés 2 vecteurs  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$  et  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$  faisant un angle  $\theta$  entre eux ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), le scalaire  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  est appelé *produit scalaire* des 2 vecteurs et est intimement relié à la *projection* du vecteur  $\mathbf{b}$  sur le vecteur  $\mathbf{a}$ : en effet, on a montré que

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Dans la figure 4, les vecteurs à considérer sont :  $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{PR}$ ,  $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \overrightarrow{PS}$ . Notez qu'alors le vecteur  $\mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$  est orthogonal au vecteur  $\mathbf{a}$  et est appelé une *projection orthogonale* de  $\mathbf{b}$  sur  $\mathbf{a}$ .

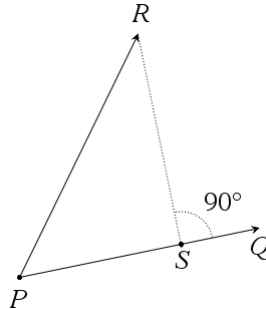


Figure 4

Et le vecteur  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1]$  en est le *produit vectoriel* et ce vecteur est à la fois orthogonal à  $\mathbf{a}$  et à  $\mathbf{b}$ . Sa norme donne l'aire du parallélogramme engendré par  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  puisque

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta.$$

En « bonus », nous avons donc que l'aire du triangle de sommets  $P$ ,  $Q$  et  $R$  vaut alors

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \text{ où } \mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}, \mathbf{b} = \overrightarrow{PR}.$$

Finalement, si l'on a un troisième vecteur  $\mathbf{c}$ , alors le volume  $V$  du parallépipède engendré par les 3 vecteurs est donné par la valeur absolue du *produit mixte*:  $V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ .

## Droites et plans dans l'espace

**3.1 Droite** En classe, on a dit de toujours trouver l'équation d'une droite  $D$  en revenant à la situation où l'on connaît un point  $P$  par lequel la droite passe et son vecteur de direction  $\mathbf{v}$  (ou vecteur parallèle). Si  $O$  désigne le point d'origine  $(0, 0, 0)$ , si  $X$  désigne un quelconque point de cette droite, alors l'équation vectorielle de la droite  $D$  est  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \mathbf{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Posant  $X = (x, y, z)$ ,  $P = (p_1, p_2, p_3)$  et  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ , cela donne :

$$\begin{cases} x = p_1 + t v_1 \\ y = p_2 + t v_2 \\ z = p_3 + t v_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{matrix} x - p_1 \\ v_1 \end{matrix} = \begin{matrix} y - p_2 \\ v_2 \end{matrix} = \begin{matrix} z - p_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

(équations paramétriques) (équations symétriques)

**3.2 Exemple** Un point  $X$  et le vecteur  $\overrightarrow{OX}$  ayant les mêmes composantes, il est naturel en mathématiques de les confondre et la calculatrice Nspire CAS en fait de même. Par conséquent, abusant de la notation, nous pouvons donc dire qu'un *segment de droite* allant d'un point  $A$  à un point  $B$  peut se paramétrer par  $\mathbf{r}(t) = A + t(B - A)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**3.3 Plan** De même pour un plan, toujours revenir au cas où le plan  $\Pi$  cherché passe par un point  $P = (p_1, p_2, p_3)$  et est normal (perpendiculaire) au vecteur  $\mathbf{n} = [A, B, C]$  : si  $X = (x, y, z)$  est un quelconque point du plan, alors le vecteur  $\overrightarrow{PX}$  est dans le plan et est donc perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{n}$  et ainsi l'équation du plan est alors

$$(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad ("X \cdot n = P \cdot n")$$

Remarquez encore l'abus de notation (ci-haut entre les guillemets) : on a volontairement mélangé les points  $P, X$  et le vecteur  $\mathbf{n}$ , n'en déplaise aux physiciens! Et puisque  $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n} = p_1 A + p_2 B + p_3 C = D$ , on voit donc que l'équation (algébrique) d'un plan peut toujours s'écrire sous la forme

$$Ax + By + Cz = D.$$

**3.4 Exemple** Trouvons des équations paramétriques de la droite d'intersection des 2 plans suivants :  $x + 2y - 3z = 1$  et  $3x + y - z = -3$ . Ces 2 plans ne sont pas parallèles puisque les vecteurs normaux respectifs ne le sont pas :

$$\mathbf{n}_1 = [1, 2, -3] \text{ n'est pas un multiple de } \mathbf{n}_2 = [3, 1, -1].$$

Ils se coupent donc le long d'une droite. On trouve facilement un point sur cette droite en posant  $z = 0$  (par exemple) et en résolvant les 2 équations à 2 inconnues qui en découlent. On trouve facilement  $x = -7/5$  et  $y = 6/5$ . Ainsi le point  $P = (-7/5, 6/5, 0)$  est un point de la droite. La droite étant à la fois dans le premier plan et dans le second plan, son vecteur de direction  $\mathbf{v}$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = [1, -8, -5]$ . Ainsi, les équations paramétriques de la droite sont

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{5} + t, & y = \frac{6}{5} - 8t, & z = -5t \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Le lecteur pourra vérifier que cette réponse est bonne en substituant les valeurs de  $x, y$  et  $z$  dans chacune des équations des plans. Le paramètre «  $t$  » va disparaître puisque la droite est dans chacun des 2 plans, pour toute valeur de  $t$ .

Remarquez qu'on apprendra éventuellement à résoudre à l'aide des matrices le système de 2 équations (linéaires) à 3 inconnues. Pour l'instant, nous montrons (figure 5) comment la commande « solve » répond — la constante arbitraire réelle  $cI$  que Nspire utilise correspond à notre  $-5t$ . Nous montrons aussi ce que produit la commande « rref » à la matrice augmentée du système.

$\text{solve}\left(\begin{cases} x+2\cdot y-3\cdot z=1 \\ 3\cdot x+y-z=-3 \end{cases}, \{x,y,z\}\right)$	$x=\frac{-(cI+7)}{5} \text{ and } y=\frac{2\cdot(4\cdot cI+3)}{5} \text{ and } z=cI$
$ma:=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
$k:=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$
$\text{rref}(\text{augment}(ma,k))$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-8}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Figure 5

Finalement, un portrait 3D du résultat à la figure 6 :

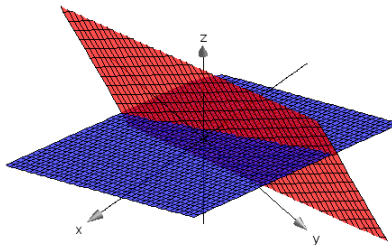


Figure 6

**3.5 Exemple** Quelquefois, l'équation d'un plan est donnée par ses équations paramétriques. Ainsi, les équations paramétriques  $\{x = 3 + 2t - 4u, y = -1 - t + u, z = 3t - 5u \quad (t, u \in \mathbb{R})\}$  sont celles d'un plan passant par le point  $P = (3, -1, 0)$  et engendré par les 2 vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = [2, -1, 3], \mathbf{v}_2 = [-4, 1, -5].$$

Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  peut donc s'obtenir en faisant le produit vectoriel des 2 vecteurs qui engendrent le plan : on trouve facilement l'équation  $x - y - z = 4$ . Notez qu'en résolvant pour les paramètres  $t$  et  $u$ , on aurait aussi trouvé le même résultat.

**3.6 Formules de distances** Des applications des produits scalaire et vectoriel ont mené aux formules suivantes, démontrées en classe. Formules utiles mais dont on peut se passer (voir exemple 3.7 plus loin).

**3.6.1** Distance d'un point  $P$  à un plan :  $d = \frac{|\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$  où  $Q$  est un quelconque point du plan et  $\mathbf{n}$

un vecteur normal au plan. Évidemment, cette formule sert aussi pour trouver la distance entre 2 plans parallèles.

**3.6.2** Distance d'un point  $P$  à une droite de  $\mathbb{R}^3$  :  $d = \frac{\|\overline{PQ} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$  où  $Q$  est un quelconque point de

la droite et  $\mathbf{v}$  le vecteur de direction (parallèle) à la droite.

**3.6.3** Distance entre 2 droites gauches  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  :  $d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}$  où  $P \in \Delta_1, Q \in \Delta_2$  sont quelconques et où  $\mathbf{v}_1$  (resp.  $\mathbf{v}_2$ ) est le vecteur de direction de la droite  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ).

**3.7 Exemple** Quel est le point du plan  $2x + 3y + z = 10$  le plus près du point  $P = (5, 2, 3)$  et quelle est cette distance? La distance peut être trouvée immédiatement avec la formule de 2.2.1 en choisissant  $Q = (0, 0, 10)$  par exemple. Comme  $\mathbf{n} = [2, 3, 1]$ , on trouve alors

$$d = \frac{|[-5, -2, 7] \cdot [2, 3, 1]|}{\|[2, 3, 1]\|} = \frac{9\sqrt{14}}{14} \approx 2.41.$$

Si  $W$  est le point du plan qui réalise cette distance, alors  $\text{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{WP}$  et alors

$$W = (5, 2, 3) - \left(\frac{9}{7}, \frac{27}{14}, \frac{9}{14}\right) = \left(\frac{26}{7}, \frac{1}{14}, \frac{33}{14}\right).$$

On peut aussi trouver ce point en disant que la droite passant par  $P$  et suivant le direction du vecteur  $\mathbf{n}$  vient percer le plan au point  $W$  et donc  $2(5 + 2t) + 3(2 + 3t) + 3 + t = 10$ , d'où  $t = -9/14$  et le point  $W$  est reconfirmé. On peut aussi argumenter en disant que si  $(x, y, z)$  est un quelconque point du plan, alors on cherche à minimiser l'expression de 2 variables  $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (10-2x-3y-3)^2$ . Cela nous amène à l'optimisation à plusieurs variables. Mais avant il nous faut parler des fonctions de plusieurs variables, à valeurs réelles (les champs scalaires).

## *Surfaces, gradient, dérivée directionnelle et plan tangent*

**4.1 Fonctions de 2 variables, équations de la forme  $F(x, y, z) = 0$**  Si une fonction (champ scalaire) du type  $z = f(x, y)$  donne, comme graphique, une surface dans l'espace, il en est de même — de façon plus générale en fait — d'une équation du type  $F(x, y, z) = 0$ . Par contre, si du graphisme implicite 3D n'est pas disponible sur votre système, il pourra être difficile de se représenter le graphique dans plusieurs des cas. Le graphisme paramétrique 3D de Nspire CAS peut alors devenir très utile.

**4.2 Exemple** *Coordonnées cylindriques.* Comment tracer le graphique du cylindre  $x^2 + y^2 = 4$  avec Nspire CAS? On utilise les coordonnées cylindriques

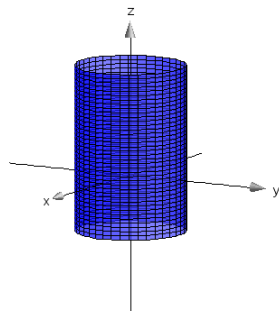
$$\{x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = z \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R})\}$$

avec un rayon  $r = 2$ . Puisque les lettres choisies par Nspire en mode graphique paramétrique 3D sont «  $t$  » et «  $u$  », il est simple de remplacer  $\theta$  par  $t$  et  $z$  par  $u$ . La figure 7 montre le cylindre où  $z$  varie de  $-2$  à  $4$ .

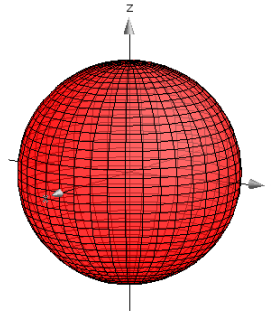
**4.3 Exemple** *Coordonnées sphériques.* Comment tracer un « beau » graphique de la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  avec Nspire CAS sans être obligé de tracer les 2 graphes, celui de l'hémisphère nord  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$  et celui de l'hémisphère sud  $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$  ? Réponse : utiliser les coordonnées sphériques. Ces coordonnées sont définies par les équations

$$\{x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi), y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi), z = \rho \cos(\phi) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi, \rho \geq 0)$$

La figure 8 montre cette sphère où  $t$  a remplacé  $\theta$  et où  $u$  a remplacé  $\phi$ . La valeur de  $\rho$  est 4.



**Figure 7**



**Figure 8**

**4.4 Exemple** Trouvons des équations paramétriques pour la courbe d'intersection du parabolôide  $z = x^2 + 2y^2 + 1$  et du plan  $2y + z = 8$ .

Remarquons qu'il n'est pas facile — voire même impossible en général — de trouver des équations paramétriques de la courbe d'intersection de 2 surfaces. Algébriquement parlant, nous faisons face à un système de 2 équations (non linéaires mais polynomiales ici) à 3 inconnues :

$$\begin{cases} z - x^2 - 2y^2 - 1 = 0 \\ 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

Le système est équivalent à celui-ci (on résout pour  $z$  dans la seconde équation et porte cette valeur dans la première) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0 \\ 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

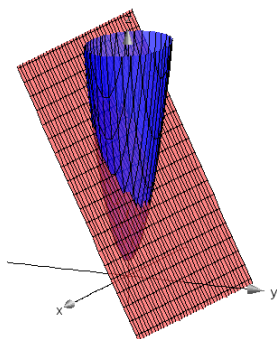
On complète le carré dans  $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$  et le tour sera joué si l'on utilise la première identité de trigo, à savoir  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). La séance Nspire CAS de la figure 9 donne les détails. Une fois la paramétrisation trouvée, il est bon de vérifier si nous sommes corrects.

$z=x^2+2\cdot y^2+1 z=8-2\cdot y$	$8-2\cdot y=x^2+2\cdot y^2+1$
$\text{completeSquare}(8-2\cdot y=x^2+2\cdot y^2+1,\{x,y\})$	$-x^2-2\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-15}{2}$
$\text{solve}\left(\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\cos(t) \\ \sqrt{2}\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\sin(t) \end{array}\right\},\{x,y\}\right)$	$x=\frac{\sqrt{30}\cdot\cos(t)}{2}$ and $y=\frac{\sqrt{15}\cdot\sin(t)-1}{2}$
$xx:=\frac{\sqrt{30}\cdot\cos(t)}{2};yy:=\frac{\sqrt{15}\cdot\sin(t)-1}{2}$	$\frac{\sqrt{15}\cdot\sin(t)-1}{2}$
$zz:=8-2\cdot yy$	$9-\sqrt{15}\cdot\sin(t)$
$cv:=\{xx\ yy\ zz\}$	$\left[\frac{\sqrt{30}\cdot\cos(t)}{2}\ \frac{\sqrt{15}\cdot\sin(t)-1}{2}\ 9-\sqrt{15}\cdot\sin(t)\right]$
$cv[1,3]-cv[1,1]^2-2\cdot cv[1,2]^2-1$	0
$cv[1,3]-8+2\cdot cv[1,2]$	0

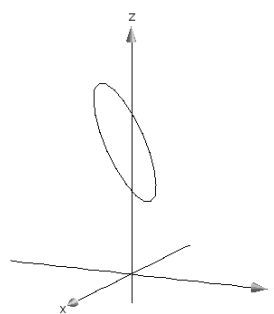
**Figure 9**

En 2D, les équations paramétriques  $\left\{ x = \frac{\sqrt{30} \cos(t)}{2}, y = \frac{\sqrt{15} \sin(t) - 1}{2} \right.$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )

sont celles d'une ellipse qui n'est rien d'autre que la projection dans le plan des  $xy$  de la courbe 3D cherchée et dont le vecteur position a été dénoté  $cv$  dans la figure 8. La figure 10 montre les 2 surfaces et la figure 11 montre la courbe d'intersection.



**Figure 10**



**Figure 11**

Si l'on voulait trouver le volume du solide délimité par ces 2 surfaces, il serait important de trouver le domaine d'intégration : l'analyse ci-haut servirait.



**4.6 Définitions** Soit un *champ scalaire*  $f$  de 2 variables indépendantes, donc une fonction réelle  $z = f(x, y)$  et supposons les dérivées partielles premières continues. Le *plan tangent* au graphique de la surface définie par  $z = f(x, y)$  en un point  $(a, b, f(a, b))$  est donné par

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b).$$

C'est le concept qui généralise l'équation de la droite tangente à une courbe (Mat 145). Il s'agit en fait du développement de Taylor de  $f$  à l'ordre 1 (linéarisation locale) et la *différentielle de  $f$* , notée  $df$ , vient approximer la variation de la fonction:

$$\Delta f \equiv f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx df \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

**4.7 Définitions** Le vecteur  $\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]$  est appelé le *gradient* de  $f$  et possède la particularité

d'être perpendiculaire aux courbes de niveau (une *courbe de niveau  $c$*  est une courbe du plan  $xy$  telle que  $f(x, y) = c$ ). En un point  $(a, b)$ , la fonction  $f$  croît le plus rapidement dans la direction du gradient en ce point. Si, à partir de ce point, nous suivons la direction d'un vecteur (unitaire)  $\mathbf{v}$ , alors c'est la *dérivée directionnelle* (dénotée  $f'_v(a, b)$ ) qui nous renseigne sur la croissance de  $f$  puisque cette dérivée vaut  $f'_v(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$ . Ces définitions s'étendent au cas où  $f$  serait une fonction de 3 variables. Dans ce cas, le gradient de  $f = f(x, y, z)$  est le vecteur 3D  $\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$  et est un vecteur perpendiculaire à la *surface de niveau  $c$* , i.e. la surface définie par  $f(x, y, z) = c$ . Les preuves des dernières affirmations passent par la règle de dérivation des fonctions composées dont nous glissons un mot maintenant.

**4.7.1 Remarque** Le vecteur (symbolique)  $\nabla$  (lire « nabla ») est donc défini (en se plaçant dans  $\mathbb{R}^3$ ) par

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

On comprend ainsi mieux la notation du gradient de  $f$  qui est  $\nabla f$  puisqu'on peut penser au produit du scalaire  $f$  par le vecteur  $\Delta$  (avec le scalaire placé à la droite plutôt qu'à la gauche du vecteur).

**4.7.2 Exemple** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = x^3 + x^2 + 3x^2 + y + 10$  et calculons la dérivée directionnelle de  $f$  au point  $(-2, 4)$  dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{v}$  défini par  $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ . En utilisant la formule donnée en 4.7, on trouve facilement la

réponse  $\frac{31\sqrt{2}}{2} \approx 21.92$  puisque  $\nabla f(-2, 4) = [16, -15]$ . On peut évidemment appliquer la

définition même de dérivée directionnelle : on se place au point  $(-2, 4)$  et suit la direction du vecteur  $\mathbf{v}$ , donc suit la droite décrite par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On calcule alors le taux de variation instantané de  $f$  dans la direction de  $\mathbf{v}$ , c'est-à-dire la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(-2, 4)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}t^2 + 13t + 31\sqrt{2}}{2} = \frac{31\sqrt{2}}{2}$$

**4.8 Dérivation en chaîne** La règle de dérivée des fonctions composées vue dans un cours de calcul à une variable, à savoir

$$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x) \quad \text{ou encore} \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

se généralise à plusieurs variables sous différentes formes. Dans ce qui suit, on suppose que toutes les dérivées (partielles) existent et sont continues.

**4.8.1** Soit  $z = f(x, y)$  (resp  $w = f(x, y, z)$ ) un champ scalaire et soit  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$  un arc paramétré (resp.  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ ). Alors, à 2 variables, on a

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (= \nabla f \cdot \mathbf{r}'(t)).$$

Et à 3 variables, c'est similaire :  $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ .

**4.8.2** Soit  $w = f(x, y, z)$  un champ scalaire et soit la surface paramétrée par

$$\{x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)\}.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

**4.9 Exemple et remarque** Notons au départ que toute surface explicite de la forme  $z = f(x, y)$  peut être vue comme une surface de la forme  $F(x, y, z) = 0$ . En effet, il suffit simplement de poser  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ . De même, on peut considérer la surface explicite  $z = f(x, y)$  comme étant la surface paramétrée  $\{x = t, y = u, z = f(t, u)\}$ , ce qui est un cas particulier de la surface paramétrée plus générale  $\mathbf{r}(t, u) = [x(t, u), y(t, u), z(t, u)]$ . Quand on parle du gradient en 3D, on

parlera alors du vecteur qui est perpendiculaire à la surface en chacun de ses points. Dépendant de la représentation choisie, il s'agira de l'un des vecteurs

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right], \left[ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right], \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}.$$

Peu importe la représentation choisie, on trouvera le même résultat pour un calcul de plan tangent par exemple. Considérons la sphère centrée au point (1, 2, 3) et de rayon 5 et supposons qu'on cherche l'équation du plan tangent à cette sphère au point (1, 5, 7). Ce point étant dans l'hémisphère nord, on a donc

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25 \Rightarrow z = 3 + \sqrt{25 - (x-1)^2 - (y-2)^2}.$$

Nous pouvons donc appliquer la définition de 4.6 au point  $(a, b) = (1, 5)$  à la fonction  $f$  définie par la valeur de  $z$  ci-haut. On peut aussi considérer la fonction  $F$  définie par l'équation  $F = 0$  où

$$F(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 25.$$

Finalement, on peut utiliser les coordonnées sphériques (avec la translation car le centre de la sphère n'est pas à l'origine) avec  $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = [1 + 5 \cos(\theta) \sin(\varphi), 2 + 5 \sin(\theta) \sin(\varphi), 3 + 5 \cos(\varphi)]$ .

La séance Nspire CAS de la figure 12 montre les résultats pour les 3 approches. On y voit que l'équation du plan tangent est  $z = 43/4 - 3y/4$ .

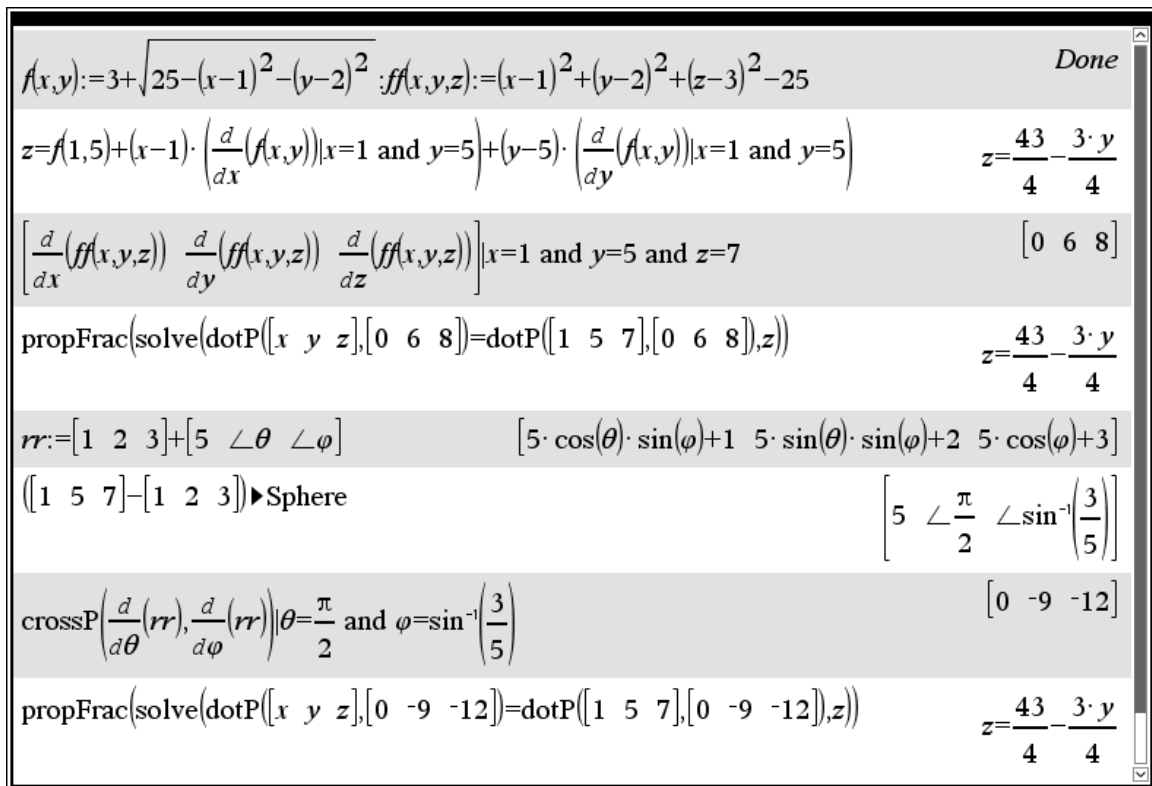


Figure 12

## Optimisation libre, sur un fermé borné, optimisation avec contraintes

Soit un champ scalaire  $f$  et supposons maintenant que les dérivées partielles secondes sont aussi continues.

**5.1 Définition** On appelle *point critique* ou *point stationnaire* un point  $(a, b)$  tel que  $\nabla f(a, b) = [0, 0]$  i.e. tel que  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ .

**5.2 Optimisation libre** Un théorème stipule que ce point critique est un minimum local lorsque  $D(a, b) > 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$  et est un maximum local lorsque  $D(a, b) > 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ . La

fonction  $D$  (discriminant ou hessien) est définie par  $D(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$ . Des

fonctions, définies en classe (voir l'exemple 5.5 plus loin), permettent d'analyser la nature des points critiques trouvés de façon efficace.

**5.3 Remarque** Justifions quelque peu ce dernier résultat. En calcul à une variable, nous avons vu le théorème de Taylor qui permet d'approximer une fonction  $f$  suffisamment dérivable près d'un point  $a$  : en particulier en utilisant le polynôme de Taylor d'ordre 2 :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Ainsi si  $a$  est un point critique de  $f$ , on a alors  $f(x) - f(a) \approx \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$  et le signe de  $f''(a)$

nous indique donc s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local. Le résultat contenu en 1.2 découle aussi de théorème de Taylor à 2 variables cette fois-ci qui est de la forme suivante:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y-b) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \cdot (y-b)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \cdot (x-a) \cdot (y-b)$$

Soit  $(a, b)$  est un point critique de  $f$ . On voit donc qu'il suffit d'étudier l'allure du graphique d'une expression de la forme  $Ax^2 + Bxy + Cy^2$  (on a ramené le point  $(a, b)$  à  $(0, 0)$ ). Or une complétion du carré nous donne ceci (et on comprend alors l'importance du signe de  $D$  dans 1.2)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A \left( x + \frac{By}{2A} \right)^2 + \frac{(4AC - B^2)y^2}{4A}$$

**5.4 Exemple** L'expression  $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (10-2x-3y-3)^2$  représente, en 3D, un parabolöide ouvert vers le haut. Par conséquent, son unique point critique est un minimum — absolu ici même si le domaine est tout  $\mathbb{R}^2$  — et on peut facilement retrouver le résultat de l'exemple 3.7. Les calculs sont ici très simples. Voici les résultats :

$(x-5)^2+(y-2)^2+(10-2\cdot x-3\cdot y-3)^2 \rightarrow f$	$5\cdot x^2+x\cdot(12\cdot y-38)+10\cdot y^2-46\cdot y+78$
zeros $\left( \begin{array}{c} \frac{d}{dx}(f) \\ \frac{d}{dy}(f) \end{array}, \{x,y\} \right)$	$\begin{bmatrix} 26 & 1 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$
$\sqrt{f} _{x=\frac{26}{7} \text{ and } y=\frac{1}{14}}$	$\frac{9\cdot\sqrt{14}}{14}$

Figure 13

Le calcul des points critiques et la détermination de leur nature peut devenir long et pénible. Pour cette raison, des fonctions programmées peuvent s'avérer utiles.

**5.5 Exemple** Voici une façon efficace d'utiliser la calculatrice et des fonctions de la librairie « Kit\_ETS\_MB » (la librairie disponible [ici](#)). On veut classier les points critiques de la fonction  $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$ . Puisque  $f$  est polynomiale, tous les points critiques seront — devraient du moins être — trouvés par la fonction “ptcri” et la fonction “nature” retournant le couple  $\left[ D(a, b), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \right]$  permettra de déterminer la nature du point critique (min local? Max local? Point de selle?). Nous mettons en mémoire la fonction  $f$  plutôt que l'expression  $f$  (on l'évaluera éventuellement).

```

v:=[x y]:f(x,y):=10\cdot x^2\cdot y-5\cdot x^2-4\cdot y^2-x^4-2\cdot y^4 Terminé
kit_ets_mb\ptcri(f(x,y),v)→mat
      2.64422  1.89838
      0.856657  0.646772
      0  0
      -0.856657  0.646772
      -2.64422  1.89838
kit_ets_mb\nature(f(x,y),v,mat[1])
      "hessien"  "dp seconde"
      2488.72  -55.9354
f(mat[1,1],mat[1,2])
      8.49586
kit_ets_mb\grad(f(x,y),v)
      [10\cdot x\cdot(2\cdot y-1)-4\cdot x^3  10\cdot x^2-8\cdot y^3-8\cdot y]
kit_ets_mb\nature(f(x,y),v,v)
      "hessien"  "dp seconde"
      [x^2\cdot(288\cdot y^2-304)-80\cdot(2\cdot y-1)\cdot(3\cdot y^2+1)  10\cdot(2\cdot y-1)-12\cdot x^2]

```

Figure 14

Nous trouvons les points critiques et appelons « mat » la matrice des points critiques. Il devient facile de substituer les coordonnées de ces points dans  $f$  puisque si  $\mathbf{m}$  est une matrice, alors  $\mathbf{m}[i, j]$  est l'élément situé à l'intersection de la  $i$  ième ligne et de la  $j$  ième colonne de  $\mathbf{m}$ . On voit que

pour le point critique (2.64442, 1.89838), il s'agit d'un maximum local, valant 8.49586. Il est même global comme l'indique un graphique 3D de la surface (vérifiez).

**5.6 Exemple** Quels sont les points sur la droite d'équation  $y = 3x + 4$  et sur la parabole d'équation  $y = -(x - 4)^2 - 2$  qui sont les plus proches l'un de l'autre ? On peut vérifier que ces deux courbes ne se croisent jamais (vérifiez !). Avec Nspire, on peut tracer chacune des courbes (figure 15), prendre un point sur chacune d'elles et mesurer la distance. On peut faire bouger les points et voir ce que la distance devient. Mais cela ne peut que donner un « aperçu » de la solution. Le calcul différentiel répond à cette question.

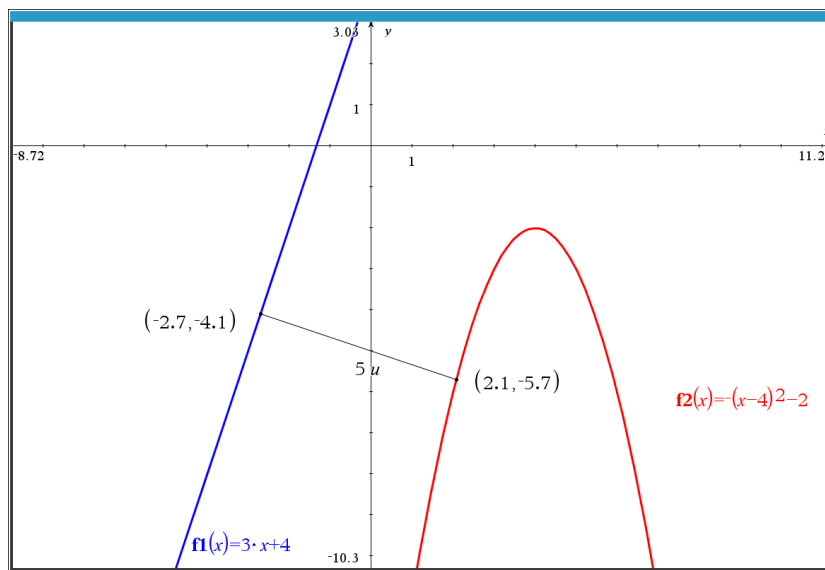


Figure 15

En effet, si l'on choisit un point  $(x_1, y_1)$  sur la droite et un point  $(x_2, y_2)$  sur la parabole, on doit donc minimiser (le carré de) la distance. Donc, en utilisant les notations de la figure 15, on doit trouver le minimum de l'expression suivante :

$$\| [x_1, f_1(x_1)] - [x_2, f_2(x_2)] \|^2.$$

Le lecteur vérifiera que cela donne une expression polynomiale de degré quatre en la variable  $x_2$  qui possède un seul point critique. Cela nous donne les points

$$\left( -\frac{89}{40}, -\frac{107}{40} \right) = (-2.225, -2.675) \text{ sur la droite et } \left( \frac{5}{2}, -\frac{17}{4} \right) = (2.5, -4.25) \text{ sur la parabole}$$

pour une distance de  $\frac{63\sqrt{10}}{40} \approx 4.98059$ .

**5.7 Optimisation sur un ensemble fermé borné** Un autre théorème affirme qu'une *fonction continue sur un ensemble fermé borné* du plan (ou de l'espace) atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur cet ensemble : on trouvera donc les points critiques intérieurs et les analysera comme précédemment et, ensuite, on ira sur la frontière, utilisant soit les multiplicateurs de Lagrange ou, dans certains cas, en paramétrant la frontière.

**5.8 Exemple** Trouvons la température maximale ainsi que la température minimale sur la plaque circulaire (un fermé borné du plan)  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$  sachant que la température en un point  $(x, y)$  est donnée par la fonction  $te$  partout continue dans le plan et définie par

$$te(x, y) = x^3 - xy + x^2 + 2y^2 - 1.$$

La figure 16 montre qu'il y a 2 points critiques à l'intérieur de la région mais que seulement le point  $(0, 0)$  est un minimum local valant  $-1$ . Le maximum absolu est donc atteint sur la frontière de  $D$ , donc sur le cercle centré à l'origine et de rayon 4. Et il en est aussi du minimum absolu comme l'indiquent les calculs de la figure 16. Notez qu'on peut se passer d'utiliser les fonctions « fMax » et « fMin » en traçant le graphique de la fonction  $te(4\cos(t), 4\sin(t))$  sur un intervalle de longueur  $2\pi$ . La figure 17 montre cela.

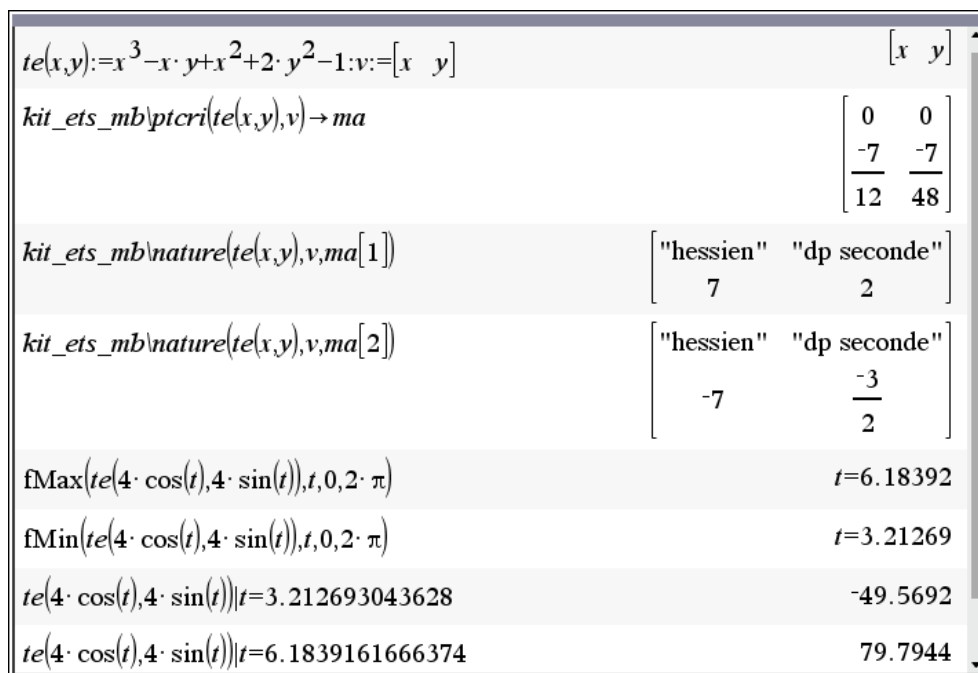


Figure 16

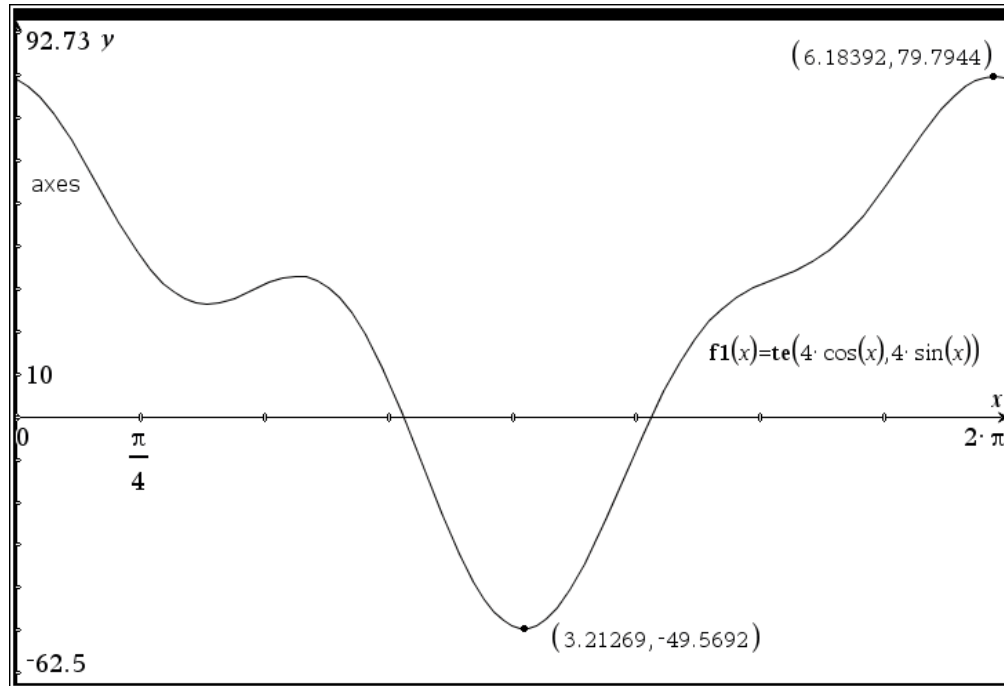


Figure 17

**5.9 Optimisation avec contrainte(s)** Finalement, la *méthode des multiplicateurs de Lagrange* dit que lorsqu'on cherche les valeurs extrêmes d'une fonction  $f$  sous la contrainte  $g = 0$ , la solution, si elle existe, se trouve parmi les solutions au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

(ce système sera à 3 équations et 3 inconnues ou à 4 équations à 4 inconnues dépendant si le problème est à 2 ou 3 variables). En utilisant la règle de dérivation en chaîne, nous verrons pourquoi l'équation  $\nabla f = \lambda \nabla g$  est nécessaire (bien que cela sera clair géométriquement). On peut facilement s'en convaincre lorsqu'il est possible de résoudre pour  $y$  dans la contrainte  $g = 0$  de sorte qu'elle devient une fonction  $h(x)$ . En effet, en une valeur extrême, on a par la règle de dérivation en chaîne

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x, h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x) = \nabla f \cdot [1, h'(x)].$$

Ce qui signifie que le vecteur  $\nabla f$  est perpendiculaire au vecteur  $[1, h'(x)]$  et ce dernier est tangent à la courbe  $g = 0$  (la contrainte), donc perpendiculaire à  $\nabla g$ . Ainsi  $\nabla f$  est un multiple de  $\nabla g$ .

Avec 2 contraintes,  $g = 0$  et  $h = 0$ , on résout le système de 5 équations à 5 inconnues suivant :

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$



Encore ici, la nécessité de la condition  $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$  découlera d'une application de la règle de dérivation en chaîne.

**5.10 Exemple** Nous pouvons reconfirmer la réponse de l'exemple 5.8 en utilisant maintenant les multiplicateurs de Lagrange.

```

te(x,y):=x^3-x*y+x^2+2*y^2-1:cont:=x^2+y^2-16
x^2+y^2-16
syst:={d/dx(te(x,y))-lambda*d/dx(cont),d/dy(te(x,y))-lambda*d/dy(cont),cont}
{3*x^2+(2-2*lambda)*x-y,(4-2*lambda)*y-x,x^2+y^2-16}
mat:=zeros(syst,{x,y,lambda})
[ 3.98031 -0.396425 7.02026
 1.41884  3.73991  1.81031
-0.831335 3.91266  2.10624
-3.98989 -0.284162 -5.02045]
voir(i):=te(mat[i,1],mat[i,2])
Done
voir(1) 79.7944
voir(2) 26.5368
voir(3) 32.9871
voir(4) -49.5692

```

Figure 18

**5.10 Remarque et exemple** Dans le cas des multiplicateurs de Lagrange, il est important de noter que la condition

$$\nabla f = \lambda \nabla g \text{ (ou } \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \text{)}$$

est *nécessaire mais non suffisante*. Voici un exemple.

Lorsque le cône  $z^2 = x^2 + y^2$  est coupé par le plan  $z = 1 + x + y$ , cela donne une courbe : voir les figures 19 et 20.

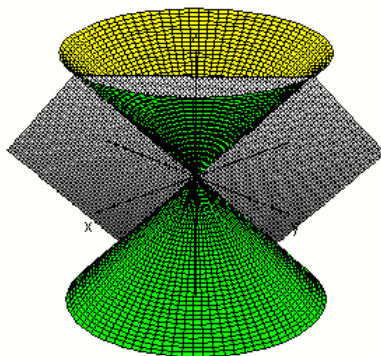


Figure 19

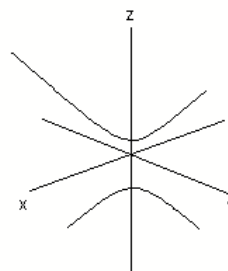


Figure 20

Supposons qu'on cherche le point sur cette courbe qui est le plus proche de l'origine. La méthode de Lagrange identifiera 2 points : le *premier* point sera le point le plus proche de l'origine mais le *second ne sera pas le point plus éloigné* (il n'y en a pas !). Les 2 points que la méthode de Lagrange va identifier sont trouvés à la figure 21 à l'aide de la fonction « lagrange2 » provenant du Kit\_ETS\_MB pour la Nspire CAS. La syntaxe de cette fonction est `lagrange2(f, g, v, λ, μ)` où  $f$  est l'expression (ou fonction) à optimiser,  $\mathbf{g}$  est le vecteur des 2 contraintes — chacune d'elles est égale à 0 —,  $\mathbf{v}$  est le vecteur des variables (en général,  $[x, y, z]$ ), les 2 multiplicateurs étant  $\lambda$  et  $\mu$ . La fonction retourne une liste à laquelle on applique la fonction « zeros ».

```

dis2:=x^2+y^2+z^2:cont1:=z^2-x^2-y^2:cont2:=z-1-x-y
v:=[x y z]
kit_ets_mb\lagrange2(dis2,[cont1 cont2],v,λ,μ)
{2·(λ+1)·x+μ,2·(λ+1)·y+μ,-2·(λ-1)·z-μ,x^2-y^2+z^2,-x-y+z-1}
zeros({2·(λ+1)·x+μ,2·(λ+1)·y+μ,-2·(λ-1)·z-μ,x^2-y^2+z^2,-x-y+z-1},{x,y,z,λ,μ})
[
  (sqrt(2)-2)/2, (sqrt(2)-2)/2, sqrt(2)-1,
  -(sqrt(2)+2)/2, -(sqrt(2)+2)/2, -(sqrt(2)+1), 2·sqrt(2)+3, 4·(2·sqrt(2)+3)
]
norm((sqrt(2)-2)/2, (sqrt(2)-2)/2, sqrt(2)-1)
norm(-(sqrt(2)+2)/2, -(sqrt(2)+2)/2, -(sqrt(2)+1))

```

Figure 21